

Thème : Problèmes sur les configurations

Cet énoncé est celui de la deuxième épreuve orale (épreuve sur dossier) du Capes Externe de mathématiques, proposé aux candidat(e)s le 6 Juillet 2005.

Pour consulter les archives de cette épreuve orale, depuis la session 2005, on se reportera au site officiel du jury, à l'adresse <http://capes-math.org/>

1. L'exercice proposé au candidat

L'exercice suivant est extrait d'un manuel de collège :

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O tel que :

$$AD = 6 \text{ cm}, DC = 12 \text{ cm et } \widehat{ADC} = 50^\circ, F \text{ est le milieu de } [DC]$$

1. Calculer les angles du triangle ADF .
Montrer que (AF) est la bissectrice de l'angle \widehat{DAB} .
2. La parallèle à (AF) passant par C coupe la droite (AB) en E . Montrer que $AECF$ est un parallélogramme. En déduire que E est le milieu de $[AB]$.
3. Montrer que les droites (EO) et (BC) sont parallèles et calculer EO .
4. Montrer que O est le milieu de $[EF]$.
5. La droite (BD) coupe la droite (EC) en I et la droite (AF) en J .
Montrer que $DJ = JI = IB$.

2. Le travail demandé au candidat


En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury


Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :

1. Préciser les différents outils mis en jeu dans votre résolution de cet exercice ainsi que le niveau auquel cette résolution pourrait être abordée.
2. Faire une analyse critique de l'énoncé et de l'enchaînement entre les différentes questions. On s'attachera notamment à évaluer le rôle des différentes hypothèses dans les résultats établis.
3. On désire partir de l'énoncé précédent pour fabriquer, pour une classe de 4^{ème}, un exercice établissant uniquement le résultat de la question 5). Rédiger un énoncé permettant d'établir ce résultat ; on veillera à ne mettre que les hypothèses indispensables.
4. Proposer un (ou deux) autre(s) exercice(s) sur le même thème.

Proposition de corrigé avec le Classpad 300


1. La construction de la figure avec le Classpad est extrêmement simple, en imposant les contraintes de l'énoncé à un parallélogramme $ABCD$ quelconque.

On ouvre l'application , puis on choisit Fich/Nouveau.



Dans le menu de construction des formes spéciales, on choisit l'icône  (ou l'option Parallélogramme dans le menu Tracé/Forme spéciale).

On touche l'écran avec le stylet et on obtient un beau parallélogramme $ABCD$ (fig1).


On va maintenant imposer les contraintes $AD = 6$, $DC = 12$ (il s'agit d'unités de longueur pour le Classpad : on peut bien imaginer que ce sont des centimètres) et $\widehat{ADC} = 50^\circ$.

On sélectionne d'abord le coté $[AD]$. On touche ensuite  avec le stylet pour afficher la deuxième partie de la barre d'icônes.

On peut alors visualiser, dans une liste déroulante, les propriétés de ce segment (longueur, pente, etc). On vérifie que le champ actif est celui qui indique la longueur.

On tape la valeur 6 dans le champ de saisie et on valide par EXE (ou en touchant la case de saisie , qui devient alors .

On sélectionne ensuite $[DC]$ (d'abord toucher une zone vide de l'écran pour désélectionner $[AB]$) puis on fixe $DC = 12$ par la même méthode.

On choisit « Aff/Zoom plein écran » (ou ) pour recadrer la figure (fig3).

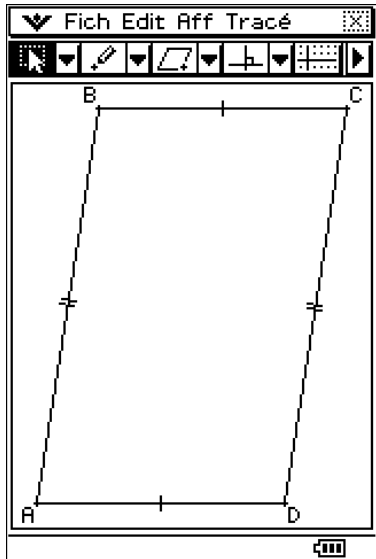


fig1 : $ABCD$ au départ

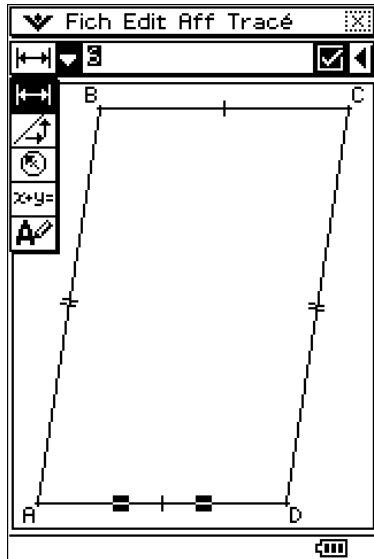


fig2 : $AD = BC = 6$

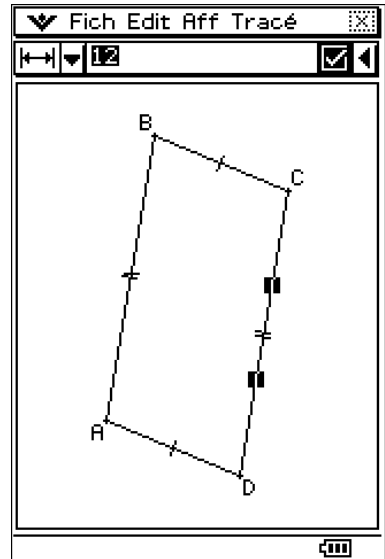





fig3 : $DC = AB = 12$

On sélectionne ensuite les deux cotés $[AD]$ et $[DC]$. On fait apparaître les propriétés de l'angle correspondant (fig4). On entre la valeur 50 dans le champ de saisie, on valide et on termine avec un recadrage par  (fig5).

On construit également le milieu F de $[DC]$ (sélectionner ce segment puis choisir  ou encore la fonction Tracé/Construire/Milieu).

Le nouveau point étant automatiquement nommé E , il convient de le sélectionner puis de le renommer en F (utilisation du champ .

On fait (fig6) la construction terminée.

Tout cela a duré moins d'une minute (30s avec un peu d'habitude)!

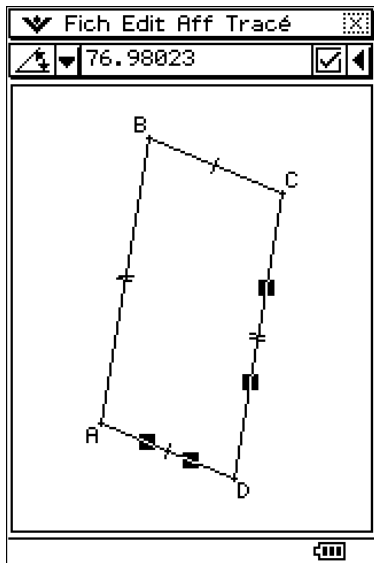


fig4 : \widehat{ADC} avant

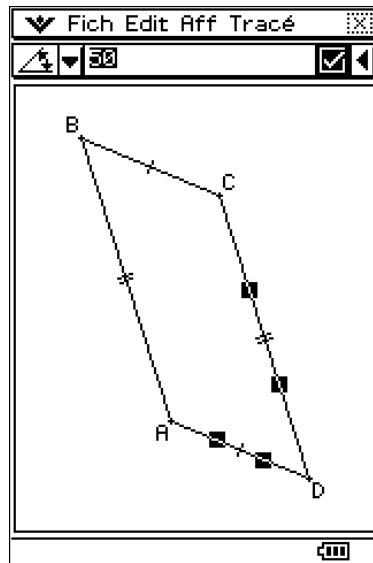


fig5 : $\widehat{ADC} = 50^\circ$

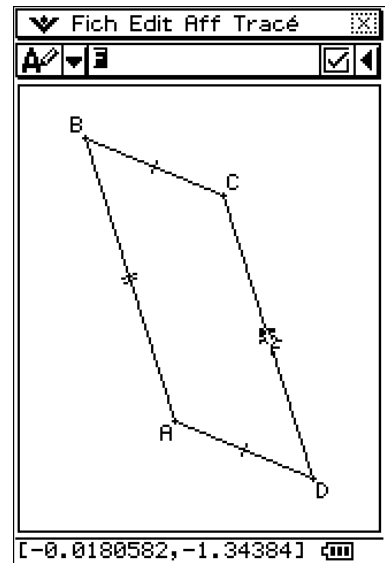



fig6 : F = milieu de $[DC]$


Nous en venons maintenant aux questions posées dans l'énoncé.

Commençons par compléter la figure en traçant le segment $[AF]$ (sélectionner l'outil , ou la fonction **Tracé/Segment de droite**) poser le stylet et le déplacer de A vers F).

Puisque F est le milieu de $[DC]$, on a $DF = \frac{DC}{2} = 6\text{cm}$ donc $DF = DA$.

Ainsi le triangle ADF est isocèle en D . Il en résulte $\widehat{DAF} = \widehat{DFA}$.

Mais $\widehat{ADC} = 50^\circ$ et $\widehat{DAF} + \widehat{DFA} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ donc $\widehat{DAF} = \widehat{DFA} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$.

C'est évidemment confirmé par le Classpad. Pour cela on sélectionne $[AD]$ et $[AF]$ (ou $[AF]$ et $[DF]$) et on observe la valeur de l'angle dans le champ désigné par  (fig7).

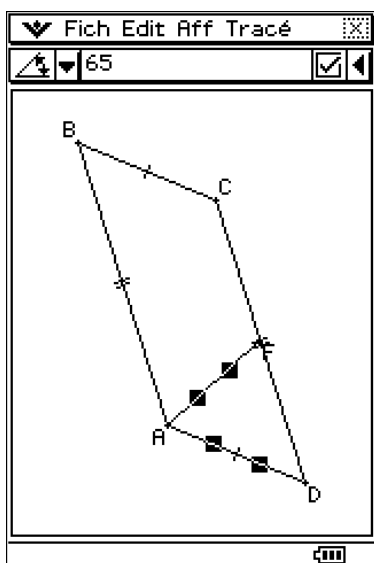


fig7 : $\widehat{DAF} = 65^\circ$

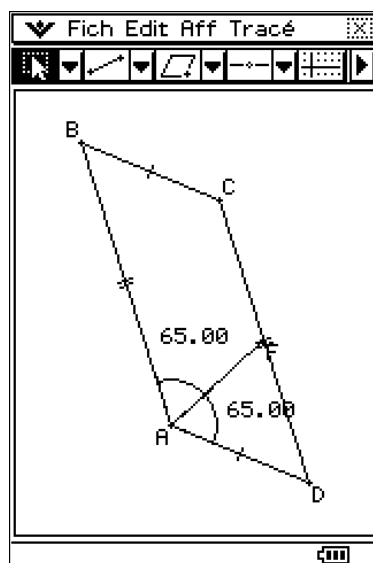


fig8 : $\widehat{DAF} = \widehat{BAF} = 65^\circ$

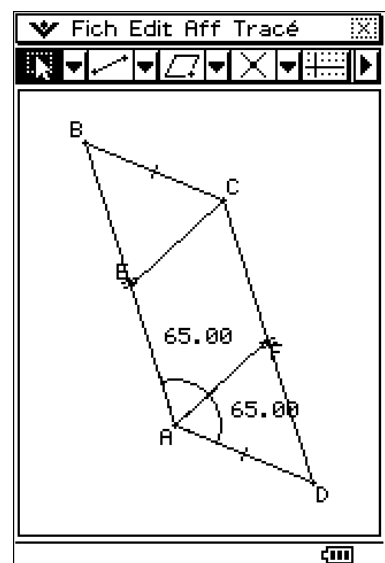



fig9 : le segment $[CE]$.


Les droites (AB) et (DC) étant parallèles, les angles \widehat{BAD} et \widehat{ADC} sont supplémentaires.

Ainsi $\widehat{BAD} = \widehat{BAF} + \widehat{FAD} = 180^\circ - \widehat{ADC} = 130^\circ$. Or $\widehat{FAD} = 65^\circ$.

Il en résulte $\widehat{BAF} = \widehat{FAD} = 65^\circ$: La droite (AF) est bien la bissectrice de \widehat{BAD} .

Sur le Classpad, il est très facile de marquer les deux angles \widehat{BAF} et \widehat{FAD} (utiliser le menu « Tracé/Angle(marqué) » pour mieux voir l'égalité (fig8).

2. Pour tracer la parallèle à (AF) passant par C sur le Classpad, on sélectionne le point C , le segment $[AF]$ puis l'icône  ou « Tracé/Construire/Parallèle »

On sélectionne ensuite cette droite et $[AB]$, puis « Tracé/Construire/Intersection » (ou tout simplement l'icône ). Le point d'intersection apparaît (on le sélectionne et on le renomme en E). Pour faire plus joli, on cache (CE) (« Edit/Propriétés/Caché ») et on trace le segment $[CE]$ à sa place. On voit le résultat (fig9).

Les segments $[AE]$ et $[FC]$ (portés respectivement par les droites (AB) et (DC)) sont parallèles, de même que $[CE]$ et $[AF]$. Il en résulte que $AECF$ est un parallélogramme.

Il est facile de vérifier cette propriété sur le Classpad. Pour cela, on sélectionne les deux segments $[AE]$ et $[CF]$ et on teste leurs propriétés conjointes (utiliser ).

On peut ainsi vérifier que ces deux segments ont même longueur (icône , c'est la réponse « oui » de la fig10) et que l'angle entre ces deux segments est nul (icône ).

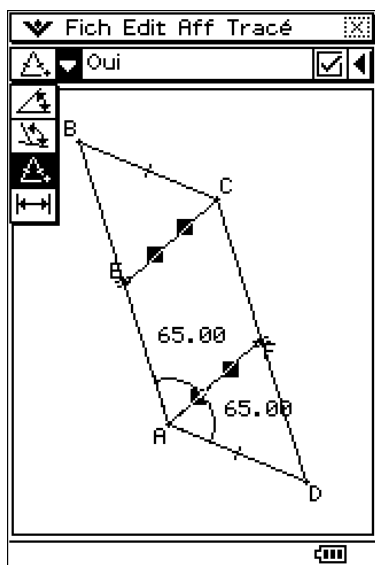


fig10 : $AF = EC$

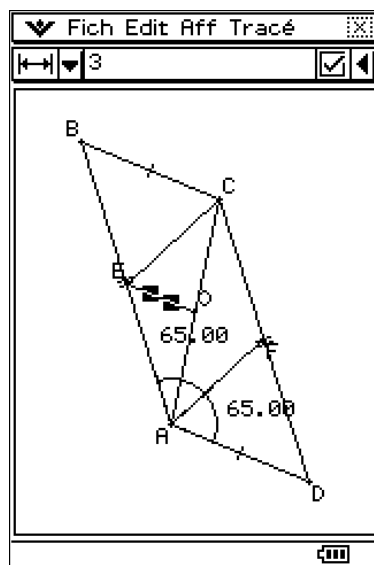


fig11 : $EO = 3\text{cm}$

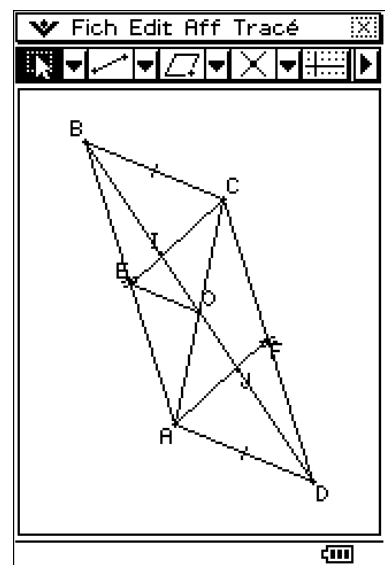



fig12 : les points I et J

Ainsi $AE = FC = \frac{DC}{2}$ (définition de F) donc $AE = \frac{AB}{2}$ (car $DC = AB$).

Cela signifie bien que E est le milieu de $[AB]$.

3. On n'a pas encore tracé le centre O de $ABCD$, c'est-à-dire le milieu commun des diagonales $[BD]$ et $[AC]$. Pour cela, on sélectionne B et D (ou A et C) puis l'icône . Pour se conformer aux notations de l'énoncé, on renomme O le point obtenu.

Puisque E est le milieu de $[BA]$ et que O est le milieu de $[CA]$, la droite (EO) est parallèle à la droite (BC) (*Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, elle est parallèle au troisième*).

On a alors $EO = \frac{BC}{2} = 3\text{cm}$ (Dans un triangle, la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est égale à la moitié de celle du troisième côté).

Sur le Classpad, on complète la construction et on vérifie que $EO = 3\text{cm}$ (fig11)

4. On sait que le parallélogramme $ABCD$ est invariant dans la symétrie de centre O .

Cette symétrie envoie B sur D , et A sur C ; elle envoie donc le milieu E de $[BA]$ sur le milieu F de $[CD]$. Le point O est donc le milieu du segment $[EF]$.

5. Sur le Classpad, on trace $[BD]$, puis son intersection I avec $[EC]$ et son intersection J avec $[AF]$. Pour aérer la figure, on peut cacher les angles \widehat{BAF} et \widehat{FAD} (fig12).

On va utiliser ici la propriété suivante : Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, elle coupe le troisième en son milieu.

Dans BAJ , la droite (EC) est parallèle à $[AF]$ et coupe $[BA]$ en son milieu E . Le point I où elle coupe le côté $[BJ]$ est donc le milieu de celui-ci. Ainsi $JI = IB$.

De même, dans DCI , (FA) est parallèle à $[CI]$ et coupe $[DC]$ en son milieu F . Le point J où elle coupe le côté $[DI]$ est donc le milieu de celui-ci. Ainsi $DJ = JI$.

Remarque sur l'énoncé

Bien sûr l'hypothèse $\widehat{ADC} = 50^\circ$ est complètement inutile dans l'énoncé. Ce qui compte réellement, c'est que $ABCD$ soit un parallélogramme et qu'on ait $DC = 2AD$.

C'est très facile à vérifier avec le Classpad. Il suffit de lever la contrainte portant sur l'angle \widehat{ADC} (décocher la case). Les contraintes $DC = 12$ et $AB = 6$ (donc $DC = 2AD$) restent valables. On peut modifier à sa guise l'un des sommets du parallélogramme $ABCD$ et vérifier que les conclusions de l'exercice sont toujours valables.

On peut également, et c'est ce que nous avons fait ici, modifier la contrainte sur \widehat{ADC} et imposer par exemple $\widehat{ADC} = 75^\circ$ (fig13), $\widehat{ADC} = 90^\circ$ (fig14) ou encore $\widehat{ADC} = 110^\circ$ (fig15).

Pour alléger un peu la construction, on a caché les noms E, F, O, I, J .

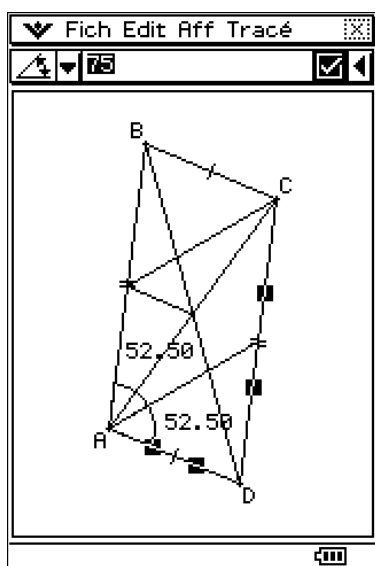


fig13 : $\widehat{ADC} = 75^\circ$

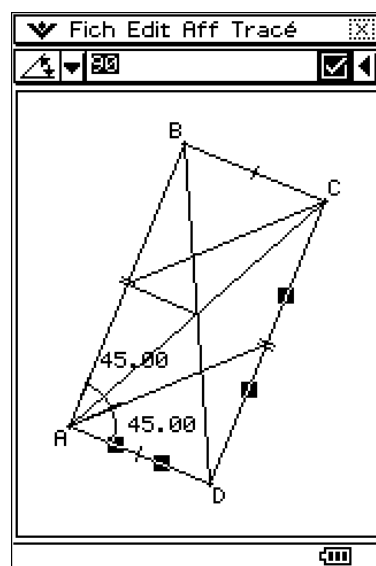


fig14 : $\widehat{ADC} = 90^\circ$

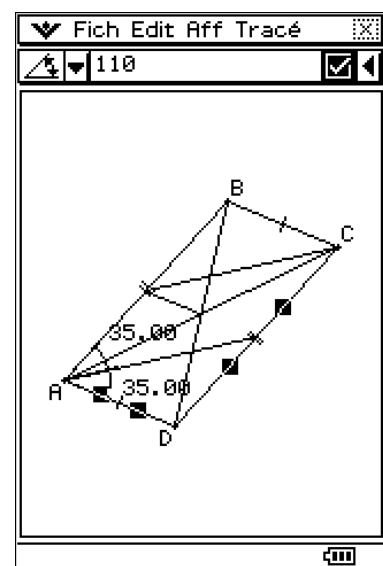


fig15 : $\widehat{ADC} = 110^\circ$