

Thème : Suites
Problèmes conduisant à des suites arithmétiques,
géométriques ou arithmético-géométriques

Cet énoncé est celui de la deuxième épreuve orale (épreuve sur dossier) du Capes Externe de mathématiques, proposé aux candidat(e)s le 11 Juillet 2005.

Pour consulter les archives de cette épreuve orale, depuis la session 2005, on se reportera au site officiel du jury, à l'adresse <http://capes-math.org/>

1. L'exercice proposé au candidat

Pour un journal, on considère que le nombre de nouveaux abonnés chaque année est de 3000 et que le taux de réabonnement d'une année sur l'autre est de 85%.

On note a_n le nombre d'abonnés de l'année n et on suppose que $a_1 = 60000$.

1. Déterminer une relation entre a_{n+1} et a_n .
2. Tracer dans un repère orthogonal la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 0,85x + 3000$.
3. Utiliser ce tracé pour représenter graphiquement les premiers termes de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$.
4. Peut-on prévoir l'évolution de cette suite ?
5. On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = a_n - 20000$. Étudier la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ et en déduire le comportement asymptotique de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :


1. Indiquer les classes de Lycée dans lesquelles on peut proposer cet exercice et les notions et outils mis en œuvre dans sa résolution.
2. Illustrer les questions 2. et 3. à l'aide d'une calculatrice.
3. Donner à l'énoncé quelques questions supplémentaires qui mettront en évidence le rôle des paramètres (nombre annuel de nouveaux abonnés, taux de réabonnement) sur le comportement asymptotique de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$.
4. Proposer un ou plusieurs exercices sur le même thème.

Proposition de corrigé avec le Classpad 300


I. L'exercice proposé au candidat

- Sur a_n abonnés du journal durant l'année n , il y en a 85% (donc $0.85a_n$) qui se réabonnent. À ces fidèles de l'année $n + 1$, il faut ajouter les 3000 nouveaux abonnés.

On a donc $a_{n+1} = 0,85a_n + 3000$ pour tout $n \geq 1$.

- On ouvre l'application  et on définit $y_1(x) = 0,85x + 3000$ (après avoir éventuellement fait le ménage par « Edit/Tout effacer »).

Un appui sur  et on définit par exemple l'intervalle $[0, 100000]$ pour x .

Après un appui sur  pour choisir au mieux l'échelle en y , on obtient le tracé.

Avec la fonction « Analyse/Tracé », on peut se déplacer sur la droite obtenue et y observer les couples (x, y) correspondants.

Avec la fonction « Cal y » du menu « Analyse/Solveur graphique », on peut imposer une abscisse, par exemple $x = 60000$: on est alors dirigé sur le point $(60000, 54000)$. Le nombre $54000 = f(60000)$ est ici celui des abonnés de l'année 2 (fig1).

La première chose que doit ici constater un élève de terminale est que la croissance de f n'implique pas celle de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ définie pourtant par $a_{n+1} = f(a_n)$!

Mais puisque nous connaissons maintenant l'inégalité $a_2 < a_1$, la croissance de f implique $f(a_2) < f(a_1)$ c'est-à-dire $a_3 < a_2$, et plus généralement $a_{n+1} < a_n$ pour tout $n \geq 1$ (par une récurrence évidente).

On sait donc déjà que le nombre d'abonnés va aller en diminuant constamment !

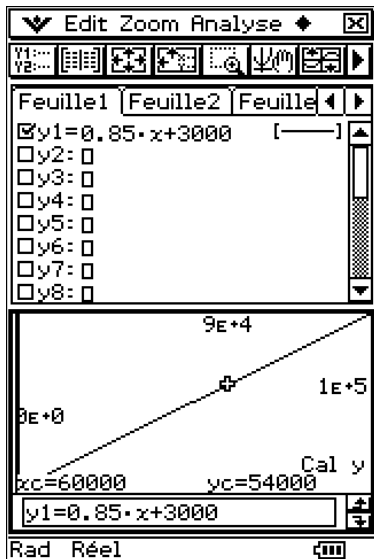


fig1 : tracé de $y = f(x)$

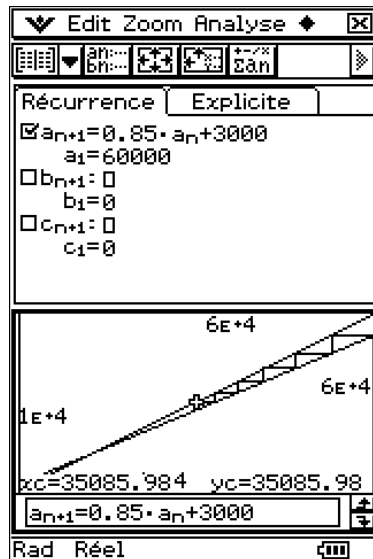


fig2 : la suite $(a_n)_{n \geq 1}$

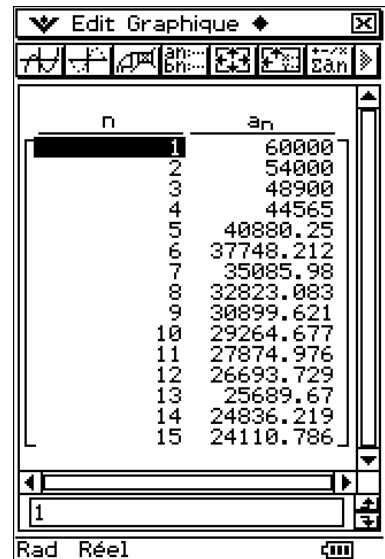



fig3 : premières valeurs


- Pour cette question, il est préférable de passer dans l'application .

On vérifie que l'onglet « Récurrence » est sélectionné.

Dans le menu « Type », on choisit « a₁ Type a_{n+1} ». On entre la définition de a_{n+1} en fonction de a_n et la condition $a_1 = 60000$ (utiliser le menu « n a_n » pour entrer a_n).



On vérifie que la suite ainsi définie est sélectionnée (case) .

Pour définir la fenêtre de tracé, on utilise « **Fenêtre Aff** ». On peut par exemple choisir $10000 \leq x \leq 60000$.

Un appui sur  (suivi de « **Zoom Auto** ») affiche alors les droites $y = x$ et $y = f(x)$.

On choisit la fonction « **Analyse/Tracé** ». Quelques appuis sur EXE permettent alors de représenter classiquement le comportement de la suite : le tracé « en escaliers » est obtenu en joignant les points (a_n, a_n) ou (a_n, a_{n+1}) (fig2).

Il est bien sûr possible d'obtenir une table des premières valeurs de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$.

Après un appui sur  pour initialiser la table (on choisit de débuter à $n = 1$ et de terminer à $n = 15$ par exemple), on sélectionne  pour afficher le résultat (fig3).

Le résultat affiché ici a été obtenu en sélectionnant une largeur de 2 cellules dans l'affichage de la table (pour effectuer ce réglage, aller dans « **Format Graphique** », choisir l'onglet « **Spécial** » et renseigner le champ « **Modèle largeur cellule** »). Avec une largeur de trois cellules, par exemple, on ne voit que la partie entière des a_n (rappelons que ceux-ci représentent des abonnés au journal!).

4. La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante, et elle est de manière évidente à valeurs positives, donc minorée. On en déduit que cette suite est convergente.

Comme elle satisfait à la récurrence $a_{n+1} = f(a_n)$, sa limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

Ainsi $\ell = 0,85\ell + 3000$ donc $\ell = \frac{3000}{0,15} = 20000$.

Conclusion : la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers la valeur 20000.

5. Pour tout $n \geq 1$, on $a_{n+1} = 0,85a_n + 3000$.

Ainsi $b_{n+1} = a_{n+1} - 20000 = 0,85a_n - 17000 = 0,85(a_n - 20000) = 0,85b_n$.

La suite $(b_n)_{n \geq 1}$ est donc géométrique de raison $q = 0,85$.

Compte tenu de $b_1 = a_1 - 20000 = 40000$, on en déduit $b_n = 40000(0,85)^{n-1}$ pour $n \geq 1$.

Ainsi $a_n = 20000 + b_n = 20000 + 40000(0,85)^{n-1}$ pour $n \geq 1$.

On retrouve évidemment $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 20000$.

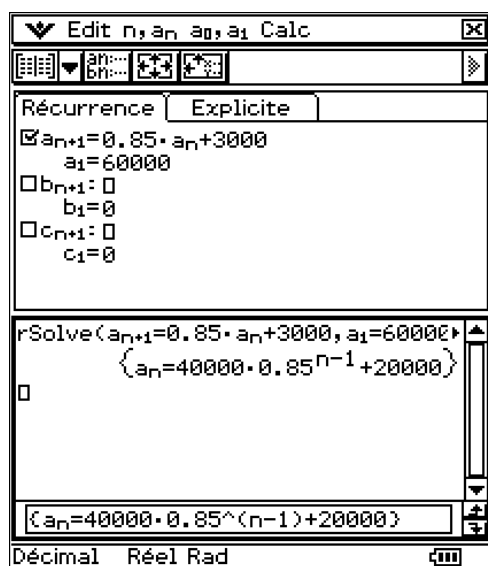


fig4 : expression générale de a_n

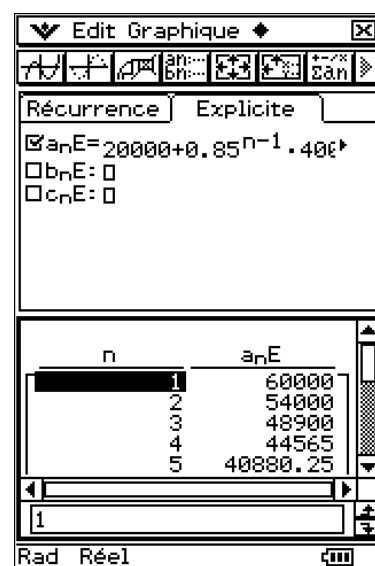




fig5 : suite explicite

Il est possible d'obtenir avec le Classpad l'expression de a_n en fonction de n .

Pour cela, depuis l'écran de définition de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$, un appui sur  affiche une fenêtre où on peut effectuer des calculs sur la ou les suite(s) étudiée(s).

On peut par exemple entrer l'expression `rSolve(an+1=0,85an+3000,a1=60000)` et obtenir l'expression générale de a_n (fig4). Ici les menus « n, a_n » et « a_0, a_1 » facilitent la saisie.

Même si ce qui précède est plus que facile, on peut effectuer une vérification dans l'environnement , mais en sélectionnant cette fois l'onglet « Explicite ».

On entre l'expression $20000 + 40000(0,85)^{n-1}$ dans le champ « $a_n E$ » et on lance comme précédemment le calcul de la table. On obtient bien sûr les mêmes premiers termes qu'avec la définition initiale (fig5).

II. Variations autour de l'énoncé

Comme précisé dans le « travail demandé au candidat », on peut modifier les paramètres de l'énoncé : le taux q de réabonnement, le nombre initial a_1 d'abonnés, et le nombre s d'abonnés supplémentaires chaque année (dans l'énoncé : $q = 0,85$, $a_1 = 60000$ et $s = 3000$).

1. Le modèle arithmético-géométrique

Si on considère que q et s sont constants, alors $a_{n+1} = f(a_n)$ pour tout $n \geq 1$, où f est l'application définie par $f(x) = qx + s$. Dans cette définition, il est légitime, vu le contexte, de supposer $0 < q < 1$ et $s > 0$.

Puisque $a_1 > 0$, une récurrence immédiate nous donne $a_n > 0$ pour tout $n \geq 1$.

L'application f étant croissante, l'inégalité initiale entre a_2 et a_1 va se conserver entre a_3 et a_2 , puis entre a_4 et a_3 , etc. En d'autres termes, on est certain que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est monotone (croissante si $a_2 \geq a_1$, décroissante sinon).

L'équation $f(x) = x$ possède la solution unique $\ell = \frac{s}{1-q}$.

Pour tout $n \geq 1$, on a $\begin{cases} a_{n+1} = qa_n + s \\ \ell = q\ell + s \end{cases}$ donc $a_{n+1} - \ell = q(a_n - \ell)$.

Ainsi la suite de terme général $b_n = a_n - \ell$ est géométrique de raison q .

Pour tout $n \geq 1$, on en déduit $b_n = q^{n-1}b_1$ donc $a_n = \ell + q^{n-1}(a_1 - \ell)$.

Puisque $0 < q < 1$, il en résulte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell = \frac{s}{1-q}$.

Ainsi le nombre d'abonnés « à long terme » est proportionnel au nombre s de nouveaux abonnés chaque année, et inversement proportionnel au pourcentage $(1-q)\%$ des clients qui résilient leur abonnement à la fin de l'année. En tout cas, il est indépendant du nombre a_1 d'abonnés de la première année.

Pour en revenir à la monotonie de $(a_n)_{n \geq 1}$, qui on le sait ne dépend que du signe de $a_2 - a_1$, remarquons que : $a_2 - a_1 = f(a_1) - a_1 = s - (1-q)a_1 = (1-q)(\ell - a_1)$.

On en déduit que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante si $a_1 < \ell$, qu'elle est strictement décroissante si $a_1 > \ell$ (et qu'elle est constante si $a_1 = \ell$).

On voit (fig6) comment trouver l'expression générale de a_n dans l'application .

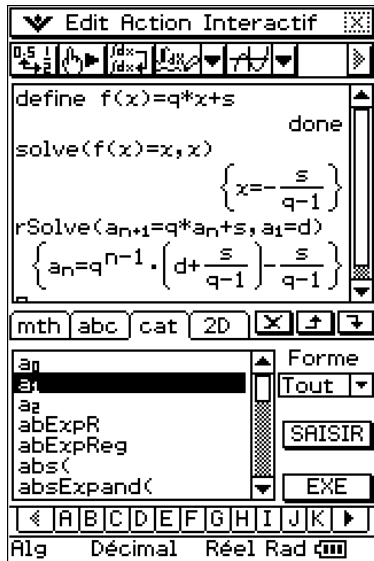
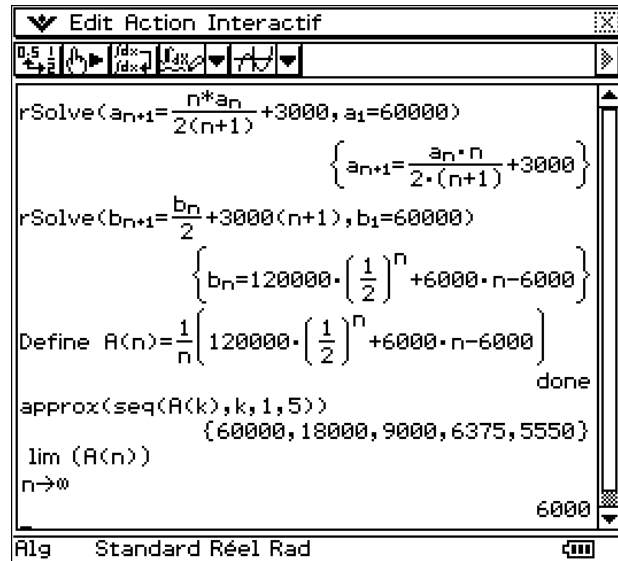
fig6 : a_n arithmético-géom.

fig7 : quelques calculs formels

2. Une légère modification du modèle

Supposons que le pourcentage de réabonnement soit de 50%, avec toujours 60000 abonnés au départ et 3000 nouveaux abonnés chaque année.

Ainsi $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3000$ pour tout $n \geq 1$.

On sait que $a_n = \ell + q^{n-1}(a_1 - \ell)$ avec $q = \frac{1}{2}$, $a_1 = 60000$ et $\ell = \frac{s}{1-q} = 2s = 6000$.

On a alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell = 6000$.

Ce n'est pas en cela que va résider notre *légère* modification du modèle.

On va en effet supposer que le taux de réabonnement d'une année sur l'autre est variable.

On suppose en fait que ce taux (de l'année n à l'année $n+1$) est $q_n = \frac{n}{2(n+1)}$ pour $n \geq 1$.

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{1}{2}$. Question : a-t-on toujours $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6000$?

La suite (a_n) est maintenant définie par $a_1 = 60000$ et (E) : $a_{n+1} = \frac{na_n}{2(n+1)} + 3000$ si $n \geq 1$.

NB : la relation (E) n'est plus type $a_{n+1} = f(a_n)$ avec une application f donnée.

Remarquons toutefois que si la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel ℓ , alors en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (E) on trouve $\ell = \frac{\ell}{2} + 3000$ donc $\ell = 6000$.

On voit (fig7) que la fonction `rSolve` du Classpad ne réussit pas à calculer l'expression de a_n .

Pour trouver a_n , l'idée est d'utiliser une suite auxiliaire.

En effet, $a_{n+1} = \frac{na_n}{2(n+1)} + 3000 \Leftrightarrow (n+1)a_{n+1} = \frac{na_n}{2} + 3000(n+1)$.

Avec $b_n = na_n$, on trouve donc $b_1 = 60000$ et (E') : $b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + 3000(n+1)$ pour $n \geq 1$.

On voit (fig7) que rSolve peut cette fois calculer l'expression générale de b_n !

Si on en croit ce résultat (et pourquoi douter, ici ?), on a donc $b_n = 6000 \left(n - 1 + \frac{20}{2^n} \right)$.

On en déduit alors $a_n = \frac{b_n}{n} = 6000 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{20}{n 2^n} \right)$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6000$ (cf fig7).

Pour résoudre (E'), on en cherche une solution particulière sous la forme $b_n = un + v$.

On trouve $(n + 1)u + v = \frac{1}{2}(nu + v) + 3000(n + 1)$ donc $\begin{cases} u = 6000 \\ v = -6000 \end{cases}$ par identification.


Ainsi la suite $n \mapsto \beta_n = 6000(n - 1)$ vérifie (E').

Par différence, on en déduit $b_{n+1} - \beta_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - \beta_n)$ pour $n \geq 1$.

La suite de terme général $c_n = b_n - \beta_n$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$, avec $c_1 = b_1 - \beta_1 = 60000$.

Ainsi $c_n = \frac{60000}{2^{n-1}}$ donc $b_n = \beta_n + c_n = 6000(n - 1) + \frac{60000}{2^{n-1}}$.

On trouve donc $a_n = \frac{b_n}{n} = 6000 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{20}{n 2^n} \right)$, et on a effectivement $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6000$.

On voit ci-dessous comment procéder dans l'application  du Classpad.

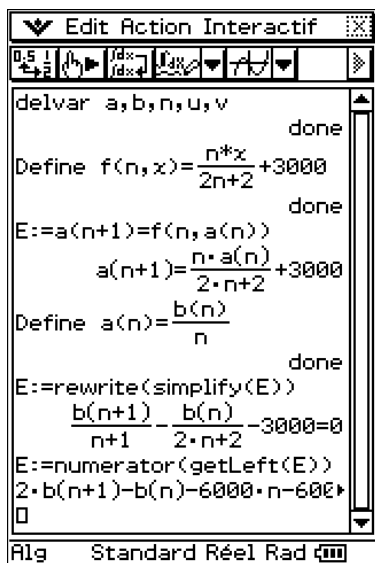


fig8

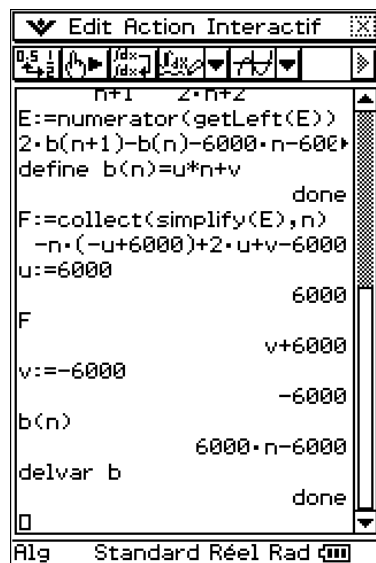


fig9

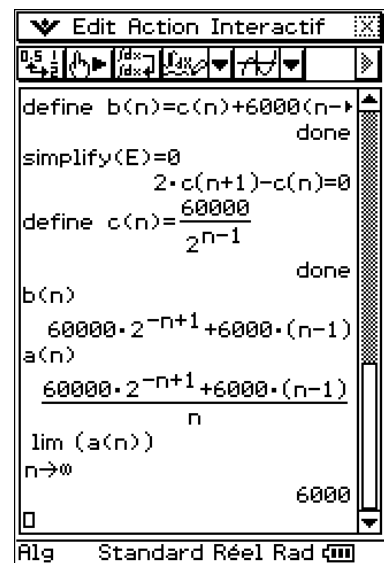



fig10

Résolution dans  de (E) : $a_{n+1} = \frac{na_n}{2(n+1)} + 3000$ si $n \geq 1$ et $a_1 = 60000$.