

Thème : Suites

Approximation d'un réel à l'aide de suite

Cet énoncé est celui de la deuxième épreuve orale (épreuve sur dossier) du Capes Externe de mathématiques, proposé aux candidat(e)s le 13 Juillet 2005.

Pour consulter les archives de cette épreuve orale, depuis la session 2005, on se reportera au site officiel du jury, à l'adresse <http://capes-math.org/>

1. L'exercice proposé au candidat

1. On considère les réels $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt$ pour tout n entier non nul et $I_0 = \int_0^1 e^{1-t} dt$.

(a) Calculer I_0 et I_1 .

(b) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel non nul, on a : $I_n - I_{n-1} = -\frac{1}{n!}$

(c) En déduire que pour tout entier naturel n on a : $I_n = e - \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!}$.

2. (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!}$.

(b) En déduire la limite de la suite (I_n) et un encadrement de e .

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :

1. Dégager les méthodes utilisées dans cet exercice.

2. Proposer un ou plusieurs exercices permettant l'approximation d'un nombre réel par une suite.

Proposition de corrigé avec le Classpad 300

I. L'exercice proposé au candidat

1. (a) On a directement $I_0 = \int_0^1 e^{1-t} dt = [-e^{1-t}]_0^1 = e - 1$.

Une intégration par parties (en dérivant t , et en primitivant e^{1-t}) donne :

$$I_1 = \int_0^1 t e^{1-t} dt = [-t e^{1-t}]_0^1 + \int_0^1 e^{1-t} dt = -1 + I_0 = e - 2.$$

(b) Soit n un entier naturel non nul. On intègre I_n par parties, en notant que la dérivée de $t \mapsto \frac{t^n}{n!}$ est $t \mapsto \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, et qu'une primitive de $t \mapsto e^{1-t}$ est $t \mapsto -e^{1-t}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt = \left[-\frac{t^n}{n!} e^{1-t}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{1-t} dt = -\frac{1}{n!} + I_{n-1}.$$

On a donc bien obtenu la relation $I_n - I_{n-1} = -\frac{1}{n!}$, pour tout n de \mathbb{N}^* .

(c) On additionne membre à membre les égalités $(E_p) : I_p - I_{p-1} = -\frac{1}{p!}$ pour $1 \leq p \leq n$.

On trouve $I_n - I_0 = -\sum_{p=1}^n \frac{1}{p!}$ donc $I_n = I_0 - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} = e - \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$, pour tout $n \geq 1$.

NB : l'expression obtenue pour I_n est encore valable si $n = 0$.

2. (a) On se donne n dans \mathbb{N}^* .

On a bien sûr $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt \geq 0$ (on intègre une fonction positive sur $[0, 1]$).

Par ailleurs on a $t^n \leq t$ sur $[0, 1]$, et on sait (tout de même) que $e \leq 3$.

On en déduit : $I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 t e^{1-t} dt$, c'est-à-dire $I_n \leq \frac{I_1}{n!}$ donc $I_n \leq \frac{e-2}{n!} \leq \frac{1}{n!}$.

(b) L'encadrement précédent donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Avec (1c), (2a) on a : $0 \leq e - \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!} \leq \frac{1}{n!}$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, on a l'encadrement :

$$\sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!} \leq e \leq \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!} + \frac{1}{n!}$$

Comme on le voit ci-contre, tout ça ne pose pas de problème au Classpad.

On a d'abord défini I comme une fonction de n .

On a ensuite calculé les premières valeurs de I_n , de façon exacte ou approchée.

NB : on se reportera au corrigé de l'épreuve du 02/07/05 pour des prolongements sur un exercice analogue.

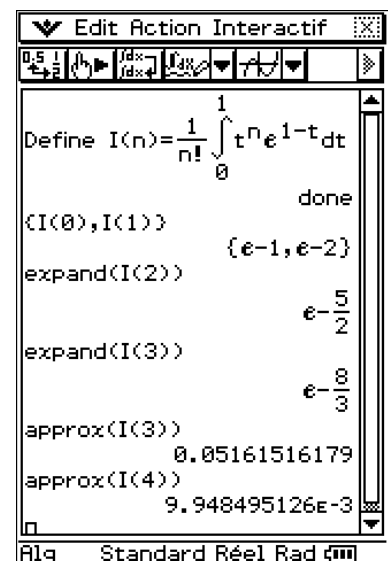


fig1 : intégrales I_n

II. Approximations de $\ln(2)$ par des suites

Dans cette partie, on va s'intéresser à plusieurs approximations du réel $\ln(2)$ par des suites.

Le lecteur curieux d'en savoir plus (et peut-être même de tout savoir) sur le sujet pourra consulter avec profit ce qui est consacré à $\ln(2)$ sur la page

<http://numbers.computation.free.fr/Constants/Log2/log2.html>

1. Première méthode (convergence lente)

Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$.

De même on pose $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

- Pour tout x de \mathbb{R}^{+*} , montrer que $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.
- Encadrer la somme u_n et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2$.
- Montrer que $u_n = v_{2n}$ pour tout n de \mathbb{N}^* , et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln 2$.
- On veut retrouver la limite de la suite (v_n) , mais directement.

Montrer que $v_n = \ln(2) - (-1)^n J_n$ avec $J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$, et conclure.

Voici un corrigé de cet exercice

- Soit x un réel strictement positif fixé. On a : $\ln(x+1) - \ln(x) = \int_x^{x+1} \frac{dt}{t}$.

La double inégalité $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$, valable pour tout t de $[x, x+1]$, fournit alors le résultat attendu par intégration terme à terme, de $t = x$ à $t = x+1$.

Le Classpad permet de confirmer ce résultat, mais par des études de fonctions (fig2).

On définit pour cela $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x)$.

On pose ensuite $g(x) = f(x) - \frac{1}{x+1}$ et $h(x) = \frac{1}{x} - f(x)$.

On constate que les applications g et h sont strictement décroissantes sur \mathbb{R}^{+*} (dérivées négatives).

On voit aussi qu'elles tendent vers 0 en $+\infty$.

Elles restent donc positives sur \mathbb{R}^{+*} .

Ainsi $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

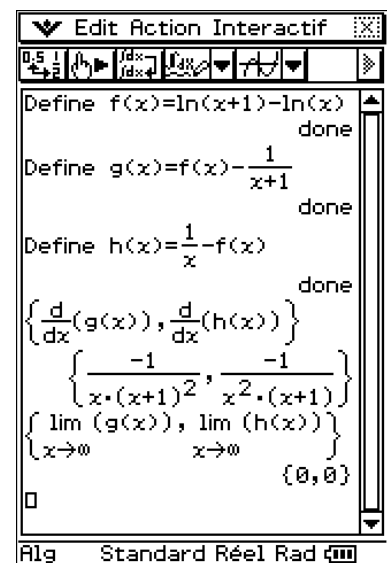


fig2 : études de fonctions




b) Considérons l'encadrement $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$, valable pour tout k dans \mathbb{N}^* .

On en déduit : $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$ pour tout entier $k \geq 2$.

Soit n dans \mathbb{N}^* . On ajoute ces inégalités, membre à membre, de $k = n+1 (\geq 2)$ à $k = 2n$.

On obtient $\ln(2n+1) - \ln(n+1) \leq u_n \leq \ln(2n) - \ln(n)$, donc : $\ln \frac{2n+1}{n+1} \leq u_n \leq \ln(2)$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{2n+1}{n+1} = \ln(2)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(2)$.

Avec le Classpad, on passe dans l'application  (on peut bien sûr utiliser les applications  ou .

On définit donc la suite $n \mapsto u(n)$.

On a calculé ici les cinq premiers termes de façon exacte.

On a ensuite calculé les valeurs approchées de u_{10} , u_{100} et u_{1000} .

On peut comparer ces valeurs à $\ln(2)$ et constater que la convergence est très lente. Par exemple u_{1000} est une valeur approchée de $\ln(2)$ à $2.5 \cdot 10^{-4}$ près par défaut.

C'est conforme (on ne pouvait guère attendre mieux) à l'encadrement obtenu pour u_n dans cette question. En effet :

$$\ln(2) - \ln \frac{2n+1}{n+1} = \ln \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right) \approx \frac{1}{2n} \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

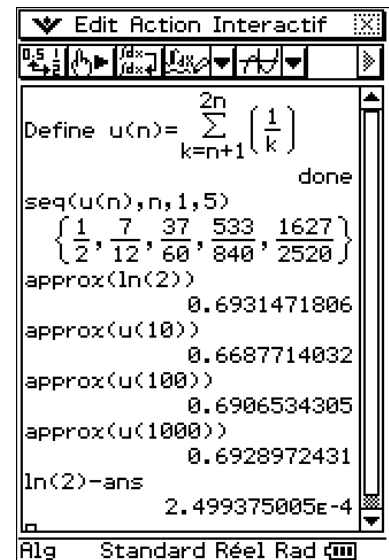


fig3 : la suite (u_n)

c) On va montrer que la suite de terme général $w_n = u_n - v_{2n}$ est constante, égale à 0.

Pour tout n de \mathbb{N}^* , on a $w_{n+1} - w_n = u_{n+1} - u_n - (v_{2n+2} - v_{2n})$.

$$\text{Mais } u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)}.$$

$$\text{De même } v_{2n+2} - v_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}.$$




On obtient donc $w_{n+1} - w_n = 0$, pour tout n de \mathbb{N}^* : la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est constante.

Or $u_1 = v_1 = \frac{1}{2}$ donc $w_1 = 0$. On a donc $w_n = 0$ pour tout n de \mathbb{N}^* .

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, on a $v_{2n} = u_n$. On en déduit bien sûr $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n} = \ln(2)$.

On a $v_{2n+1} = v_{2n} + \frac{1}{2n+1}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n+1} = \ln(2)$. Finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln(2)$.

Voici trois copies d'écran obtenues sur le Classpad :

- fig4 : on définit la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ dans l'application . On calcule la valeur exacte des six premiers termes. On vérifie ensuite l'égalité $u_n = v_{2n}$ pour $1 \leq n \leq 5$.
- fig5 : Dans , on définit les suites explicites $a_n E$ (les v_{2n}) et $b_n E$ (les v_{2n+1}). On forme une table des valeurs de ces deux suites.
- fig6 : Toujours dans , on a représenté graphiquement les 15 premiers termes des suites v_{2n} et v_{2n+1} , visiblement adjacentes, de limite commune $\ln(2)$.

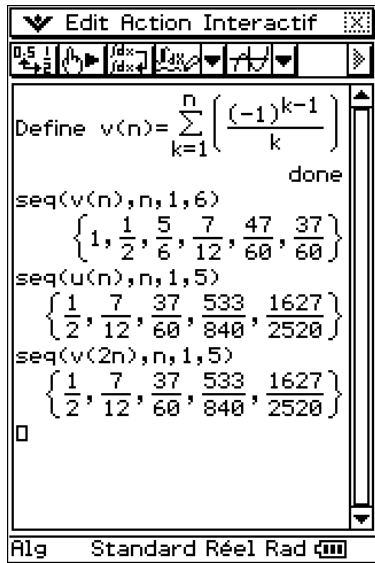


fig4 : la suite (v_n)

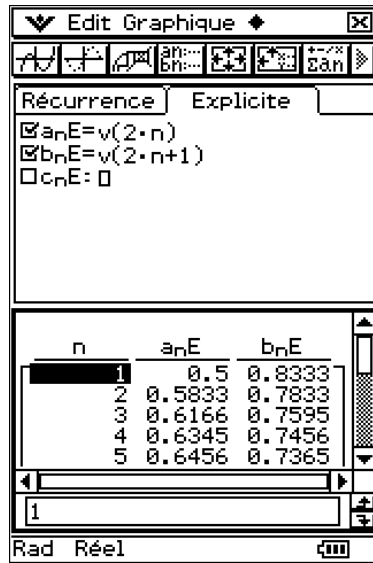


fig5 : les v_{2n} et les v_{2n+1}

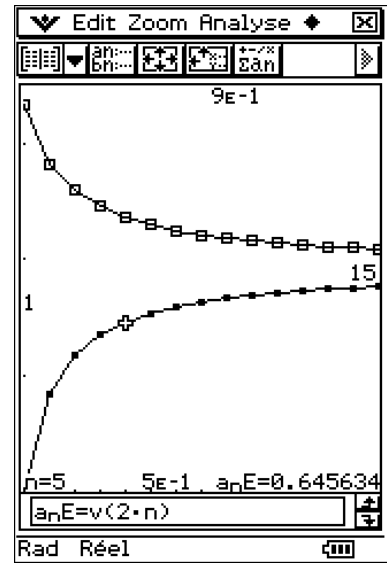


fig6 : deux suites adjacentes

d) Il suffit de remarquer que $\frac{1}{k}$ est la valeur de l'intégrale $\int_0^1 t^{k-1} dt$ pour $k \geq 1$.

Pour tout n de \mathbb{N}^* , on a donc :

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1} dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n (-t)^{k-1} \right) dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - (-1)^n J_n = \ln(2) - (-1)^n J_n \text{ avec } J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

On a $0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$ sur $[0, 1]$ donc $0 \leq J_n \leq \int_0^1 t^n dt$.

Autrement dit $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.

On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln(2)$.

L'égalité $u_n = v_{2n}$ redonne évidemment $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(2)$ (on aurait donc pu inverser l'ordre des questions de l'exercice et commencer par étudier la suite $(v_n)_{n \geq 1}$).

Sur le Classpad, on rappelle (fig7) la définition de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$, puis on définit la suite $(J_n)_{n \geq 1}$.

On vérifie ensuite que $v_n = \ln(2) - (-1)^n J_n$ pour $1 \leq n \leq 6$.

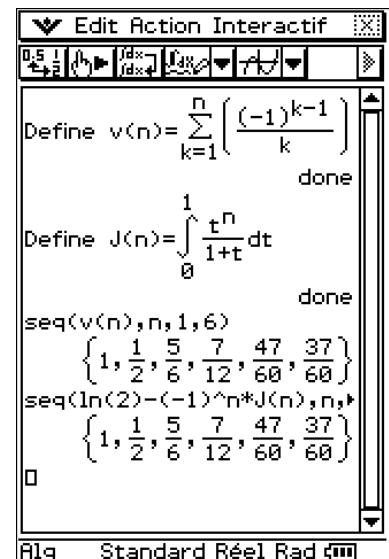


fig7 : $v_n = \ln(2) - (-1)^n J_n$

On va maintenant voir une deuxième méthode, conduisant à des suites convergeant beaucoup plus rapidement vers $\ln(2)$. Cette méthode dépasse sans doute l'esprit de l'épreuve « Oral2 », mais les techniques utilisées seront utiles à l'écrit ou pour la première épreuve orale du Capes.

2. Deuxième méthode (convergence plus rapide)

Pour tout x de $] -1, 1[$ et tout n de \mathbb{N} , on pose $K_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n dt}{(1-t)^{n+1}}$.

On pose également $s_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ pour tout $n \geq 1$.

a) Calculer $K_0(x)$ et $K_1(x)$.

b) Pour tout n de \mathbb{N}^* , et pour tout x de $] -1, 1[$, montrer que $K_n(x) = K_{n-1}(x) - \frac{x^n}{n}$.

c) En déduire que $s_n(x) = -\ln(1-x) - K_n(x)$ (pour $-1 < x < 1$ et n dans \mathbb{N}^*).

d) Montrer qu'on a la majoration $|K_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) = -\ln(1-x)$.

e) Retrouver le résultat précédent, plus rapidement, en étudiant $\psi_n : x \mapsto s_n(x) + \ln(1-x)$.

f) En déduire $\ln(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k}$, et un majorant de l'erreur commise au rang n .

g) Pour $-1 < x < 1$, montrer : $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ et majorer l'erreur au rang n .

h) En déduire $\ln(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)9^k}$ et majorer l'erreur commise au rang n .

Voici un corrigé de cet exercice

a) On a $K_0(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \left[-\ln(1-t) \right]_0^x = -\ln(1-x)$.

De même, $K_1(x) = \int_0^x \frac{(x-t) dt}{(1-t)^2} = \int_0^x \frac{(x-1+1-t) dt}{(1-t)^2}$.

Ainsi $K_1(x) = (x-1) \int_0^x \frac{dt}{(1-t)^2} + K_0(x)$.

Or $\int_0^x \frac{dt}{(1-t)^2} = \left[\frac{1}{1-t} \right]_0^x = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$.

On en déduit $K_1(x) = -x - \ln(1-x)$.

Remarque : on peut aussi intégrer $K_1(x)$ par parties (voir question suivante).

Sur le Classpad (fig8) on définit $K(n, x)$ et on calcule $K_n(x)$ pour $0 \leq n \leq 3$. On voit comment spécifier $x < 1$ et comment cette clause est prise en compte dans " $\ln(|x-1|)$ ".

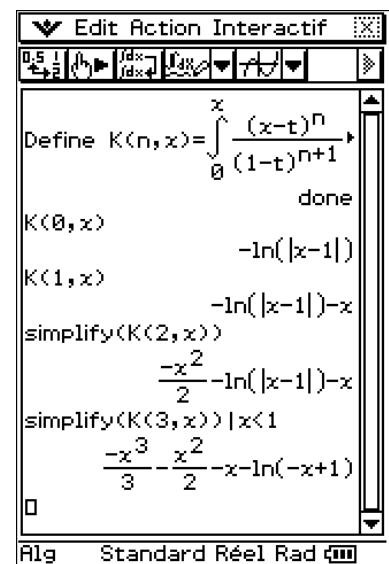


fig8 : les intégrales $K_n(x)$

b) On effectue une intégration par parties, en notant que la dérivée de $t \mapsto (x-t)^n$ est $t \mapsto -n(x-t)^{n-1}$ et qu'une primitive de $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^{n+1}}$ est $t \mapsto \frac{1}{n(1-t)^n}$.

Ainsi, pour tout $n \geq 1$:

$$K_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt = \left[\frac{(x-t)^n}{n(1-t)^n} \right]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1-t)^n} dt = -\frac{x^n}{n} + K_{n-1}(x).$$

c) On ajoute les égalités $K_p(x) = -\frac{x^p}{p} + K_{p-1}(x)$ de $p = 1$ à $p = n$.

On obtient $K_n(x) = -\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} + K_0(x) = -s_n(x) - \ln(1-x)$.

Ainsi, pour tout n de \mathbb{N}^* et tout x de $] -1, 1[$, on a : $s_n(x) = -\ln(1-x) - K_n(x)$.

d) Soit x fixé dans $] -1, 1[$. On peut écrire $K_n(x) = \int_0^x \frac{\varphi(t)^n}{1-t} dt$ avec $\varphi(t) = \frac{t-x}{t-1}$.

On a $\varphi'(t) = \frac{x-1}{(t-1)^2}$ donc φ est strictement décroissante.

Or $\varphi(0) = x$ et $\varphi(x) = 0$. On en déduit $|\varphi(t)| \leq |x|$ pour t dans $[0, x]$.

D'autre part, toujours sur $[0, x]$, on a $0 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-|x|}$.

Ainsi $|K_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{\varphi(t)^n}{1-t} dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$ (pour $n \geq 1$ et $-1 < x < 1$).

Puisque $|x| < 1$, il en découle $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n(x) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) = -\ln(1-x)$.

e) Pour $x < 1$, on a $\psi'_n(x) = \sum_{k=1}^n x^{k-1} - \frac{1}{1-x} = \frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x} = -\frac{x^n}{1-x}$.

Puisque $\psi_n(0) = 0$, on en déduit : $\psi_n(x) = \int_0^x \psi'_n(t) dt = -\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.

Ainsi, pour $x < 1$ et n dans \mathbb{N}^* , on a $s_n(x) = -\ln(1-x) - L_n(x)$ avec $L_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.

On a immédiatement $|L_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$ et on conclut comme précédemment.

Au vu de ce qui précède, on a $K_n(x) = L_n(x)$ donc $K_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n dt}{(1-t)^{n+1}} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.

NB : on peut prouver $K_n(x) = L_n(x)$ en posant $u = \frac{x-t}{1-t}$ dans $K_n(x)$.

On voit ci-dessous (fig9) comment définir et calculer les intégrales $L_n(x)$ avec le Classpad.

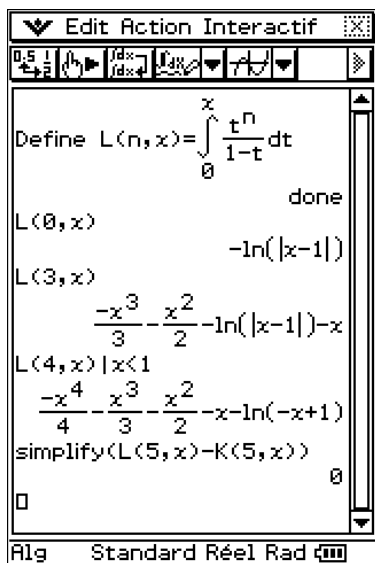


fig9 : les intégrales $L_n(x)$

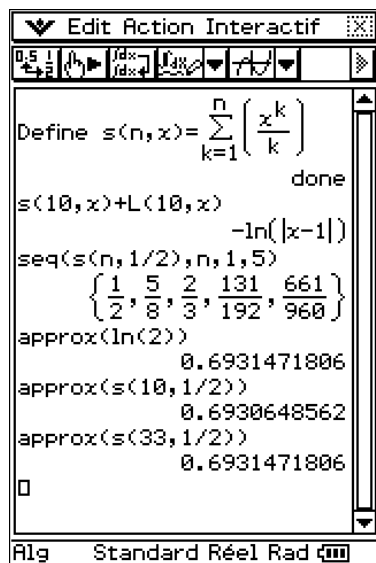


fig10 : la suite $n \mapsto s\left(n, \frac{1}{2}\right)$

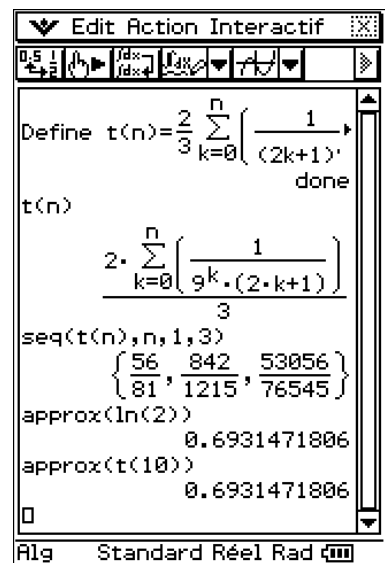



fig11 : la suite $n \mapsto t_n$

f) Avec $x = \frac{1}{2}$, on trouve $-\ln(1-x) = \ln(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k}$.

D'après ce qui précède $\left| \ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} \right| = \left| L_n\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{2^n}$.

La convergence a donc ici un caractère géométrique (plus rapide que dans l'exercice 1).

On voit (fig10) comment définir la suite $n \mapsto s_n(x)$ dans l'application .

On y calcule de façon exacte les 5 premiers termes de la suite $n \mapsto \alpha_n = s_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

On voit surtout qu'elle converge vers $\ln 2$ beaucoup plus rapidement que ne le faisait la suite (u_n) de la première méthode. En effet, les dix décimales sont stabilisées dès α_{33} .

g) Pour tout m de \mathbb{N}^* , on a $-\ln(1-x) = s_m(x) + L_m(x)$ donc $\ln(1+x) = -s_m(-x) - L_m(-x)$.

Par demi-somme : $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{s_m(x) - s_m(-x)}{2} + \frac{L_m(x) - L_m(-x)}{2}$.

Il est clair que $\frac{s_m(x) - s_m(-x)}{2}$ est la partie impaire de la somme $s_m(x) = \sum_{k=1}^m \frac{x^k}{k}$.

Posons $m = 2n + 1$. Alors $\frac{s_m(x) - s_m(-x)}{2} = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.


D'autre part $|L_m(x)|$ et $|L_m(-x)|$ sont tous deux majorés par $\frac{|x|^{m+1}}{1-|x|}$.

Ainsi $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ et l'erreur au rang n est majorée par $\frac{|x|^{2n+2}}{1-|x|}$.

h) Avec $x = \frac{1}{3}$, on a $\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(2)$.

On en déduit $\ln(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$, avec $t_n = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)9^k}$.

Un majorant de $\left| \ln(2) - \frac{2}{3} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)9^k} \right|$ est $\frac{2|x|^{2n+2}}{1-|x|}$ donc $\frac{1}{9^{n+1}}$ avec $x = \frac{1}{3}$.

On voit (fig11) la définition de la suite $n \mapsto t_n$ dans l'application .

On a la confirmation que la suite (t_n) converge vers $\ln(2)$ très (très) rapidement puisque dès t_{10} toutes les décimales sont stabilisées.