

Thème : La proportionnalité

Cet énoncé est celui de la deuxième épreuve orale (épreuve sur dossier) du Capes Externe de mathématiques, proposé aux candidat(e)s le 14 Juillet 2005.

Pour consulter les archives de cette épreuve orale, depuis la session 2005, on se reportera au site officiel du jury, à l'adresse <http://capes-math.org/>

1. L'exercice proposé au candidat

Le tableau ci-dessous reproduit une partie de la feuille de calcul de l'impôt sur le revenu de 2001. Il permet de calculer l'impôt I en fonction du revenu imposable annuel R (le tout exprimé en euros).

$$\begin{cases} \text{si } R < 4121 \text{ alors } I = 0 \\ \text{si } 4121 \leq R < 8104 \text{ alors } I = 0,075R - 309,07 \\ \text{si } 8104 \leq R < 14264 \text{ alors } I = 0,21R - 1403,12 \\ \text{si } 14264 \leq R \leq 23096 \text{ alors } I = 0,31R - 2829,52 \end{cases}$$

1. Tracer la courbe de la fonction qui donne I en fonction de R pour $R \in [0, 23096]$.
2. Le taux d'imposition est le quotient $\frac{I}{R}$ exprimé en pourcentage.
Calculer ce taux pour des revenus R de 5000, 10000, 15000 et 20000 euros.
3. Pour la tranche de revenus de 23096 euros à 37579 euros, la formule est de la forme $I = 0,41R - a$. Calculer a .
4. Une personne ayant un revenu imposable de 14000 euros a la possibilité de faire des heures supplémentaires, ce qui augmentera son revenu de 1000 euros. Elle prétend que « comme elle va changer de tranche », ces heures supplémentaires vont lui faire perdre de l'argent. Que pouvez-vous lui répondre ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :

1. Indiquer les classes de Lycée ou de Collège dans lesquelles on peut proposer cet exercice ainsi que les outils mis en oeuvre dans sa résolution.
2. Tracer la courbe demandée à la question 1. à la calculatrice.
3. Énoncer une question supplémentaire illustrant la notion de taux marginal d'imposition (les taux marginaux dans chaque tranche de revenus sont de 7,5%, 21%, 31% et 41%).
4. Énoncer une question supplémentaire mettant en évidence, au niveau d'une classe de Collège, le fait que I et R ne sont pas proportionnels.
5. La formulation de la question 3. vous semble-t-elle assez complète ? Quelles améliorations proposeriez-vous ?
6. Proposer un ou plusieurs autres exercices sur le thème de la proportionnalité.

Proposition de corrigé avec le Classpad 300

1. On ouvre l'application  du Classpad.

On y définit l'application $R \mapsto I(R)$ en utilisant la fonction *piecewise*

La syntaxe est *piecewise(test, sioui, sinon)*.

Pour définir $R \mapsto I(R)$, il suffit d'utiliser des appels imbriqués à *piecewise* (fig1) :

Define I(R) = *piecewise*(R < 4121, 0,
piecewise(R < 8104, 0.075*R - 309.07,
piecewise(R < 14264, 0.21*R - 1403.12,
piecewise(R ≤ 23096, 0.31*R - 2829.52, 0.41*R - a)))

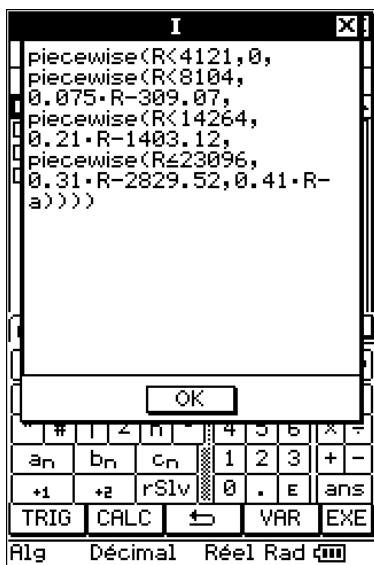


fig1 : la fonction I

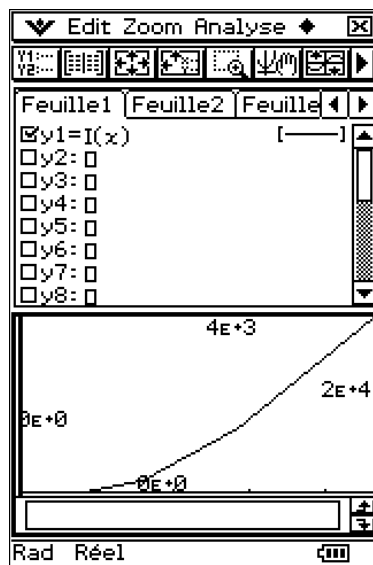


fig2 : la courbe $R \mapsto I(R)$

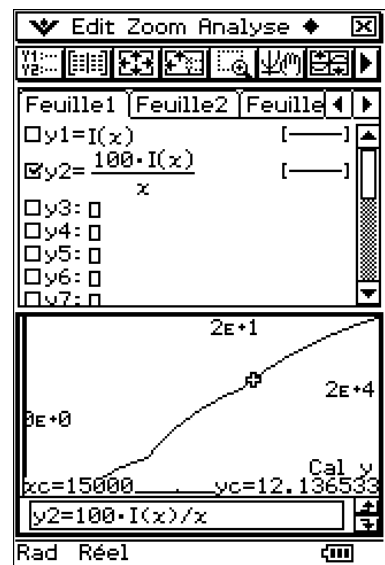





fig3 : taux d'imposition

Dans l'application , on pose $y_1(x) = I(x)$.

On définit l'intervalle $0 \leq x \leq 23096$ pour le tracé (icône ).


On trace la courbe avec  (et  pour optimiser l'intervalle des ordonnées, cf fig2)

On observe que la fonction $R \mapsto I(R)$ est continue (ce n'était pas évident à la lecture de sa définition, mais économiquement ça n'est pas surprenant) et qu'elle est croissante (c'est quand même normal!).

La courbe représentative est une succession de segments

2. On peut étudier le taux d'imposition dans l'application .


Il suffit pour cela de définir (et de sélectionner seule) la fonction $y_2(x) = 100I(x)/x$.

Pour le tracé, on garde le même intervalle en x et on utilise à nouveau  pour cadrer au mieux l'intervalle en y . On constate que le taux d'imposition augmente avec le revenu (simple mesure de justice fiscale).

Si on veut calculer quelques valeurs du taux d'imposition, on peut choisir la fonction « analyse/tracé » qui permet de se déplacer sur la courbe et de lire des couples de valeurs $(x, y_2(x))$.

Pour lire une valeur fixée à l'avance du taux d'imposition, on peut choisir la fonction « Analyse/Solveur graphique/Cal y ». Celle-ci demande une valeur de x et place le curseur sur le couple (x, y) correspondant. On a ici calculé le taux d'imposition pour un revenu égal à 15000 euros, et on obtient 12,14% (fig3).

Il est cependant préférable de revenir à l'application  (où on a défini I), d'y définir $T(R) = 100I(R)/R$ et de calculer $T(R)$ pour $R \in \{5000, 10000, 15000\}$ (fig4).

Pour ces calculs, on s'est placé en mode Decimal et on a fixé le mode d'affichage des nombres réels à Fix 2 (utiliser le menu «  Format de base »).

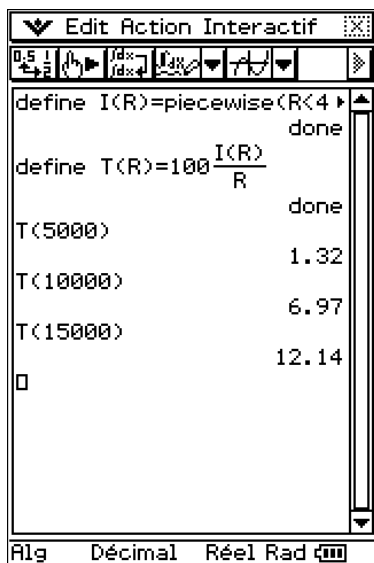
3. On constate que l'impôt pour $R = 23096$ est égal à 4330,24 euros (fig5).

On a défini la fonction I en prévoyant le cas $R > 23096$.

Pour tout valeur de $R > 23096$ (et plus généralement si l'argument R ne contient pas de valeur numérique) La fonction I renvoie alors le résultat $I(R) = 0,41R - a$ (fig5).

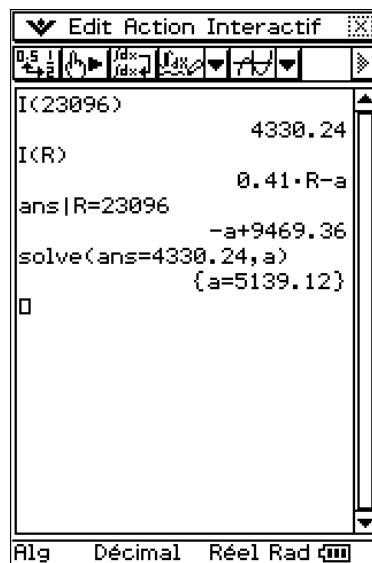
On sait que la fonction $R \mapsto I(R)$ augmente continûment. Il est donc logique que pour $R = 23096$, l'expression $0,41R - a$ redonne la valeur 4330,24.

On voit comment trouver la solution $a = 5139.12$ sur le Classpad (fig5).



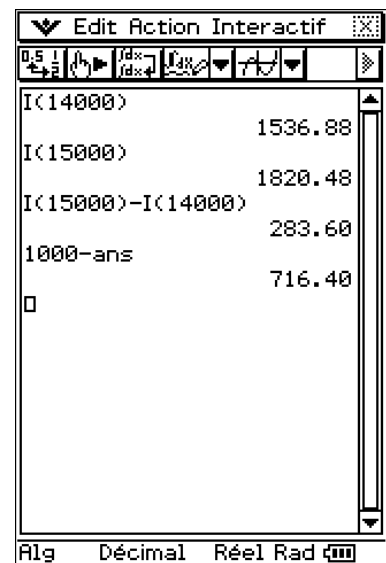
R	T(R)
5000	1.32
10000	6.97
15000	12.14

fig4 : taux d'imposition



$I(23096)$	4330.24
$I(R)$	$0.41 \cdot R - a$
ans $R=23096$	$-a + 9469.36$
solve(ans=4330.24, a)	$\{a=5139.12\}$

fig5 : la valeur de a



$I(14000)$	1536.88
$I(15000)$	1820.48
$I(15000) - I(14000)$	283.60
$1000 - \text{ans}$	716.40

fig6 : les heures sup

4. On pourrait lui répondre le Classpad à la main (fig6).

- Avec un revenu de 14000 euros son impôt serait de 1536,88 euros.
- Avec ces heures supplémentaires, son impôt passe à 1820,48 euros.
- Ses heures supplémentaires (1000 euros de revenus) lui coûtent donc 283,60 euros d'impôt. Après impôt, le revenu de cette personne aura donc augmenté de 716,40 euros, bien qu'elle ait « changé de tranche ».
- Tout ça est très simple. Les 1000 euros d'heures supplémentaires se subdivisent en 264 euros pour atteindre le haut de la tranche qui culmine à 14264 euros (tranche imposée à 21%) et en 736 euros dans la tranche suivante (imposée à 31%).

Les 1000 euros d'heures supplémentaires produisent donc un accroissement d'impôt égal à $364 * 0,21 + 736 * 0,31 = 283,60$ euros.