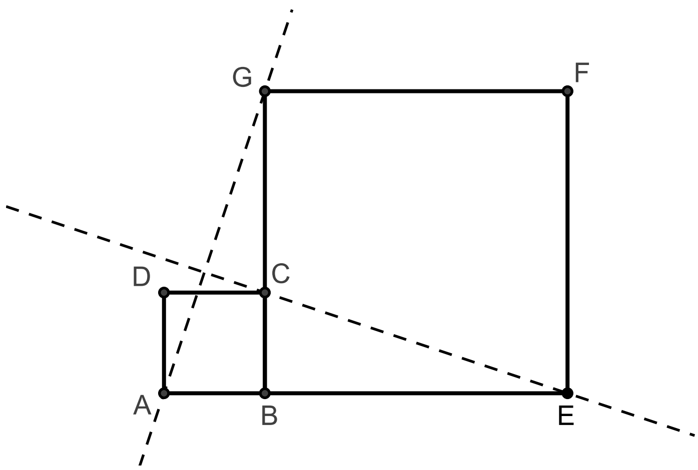
Thème : Problèmes sur les configurations
Étude de configurations à l'aide de différents outils

Cet énoncé est celui de la deuxième épreuve orale (épreuve sur dossier) du Capes Externe de mathématiques, proposé aux candidat(e)s le 15 Juillet 2005.
Pour consulter les archives de cette épreuve orale, depuis la session 2005, on se reportera au site officiel du jury, à l'adresse http://capes-math.org/

1. L'exercice proposé au candidat

Dans la figure ci-dessous, le point B est un point du segment $[AE]$ distinct de A et E. $ABCD$ et $BEFG$ sont des carrés. On se propose de démontrer, par différentes méthodes, que les droites (AG) et (EC) sont orthogonales.



1. *Outil « configurations »* : on note U le point d'intersection de (AC) et (EG). Justifier que l'angle $\widehat{AUE}$ est droit et conclure (on pourra considérer le triangle AGE).
2. *Outil « produit scalaire »* : calculer $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EC}$ et conclure.
3. *Outil « analytique »* : après avoir muni le plan d'un repère orthonormal, montrer que les droites (AG) et (EC) sont orthogonales.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :

1. Mettre en évidence, à l'aide du logiciel de géométrie dynamique de la calculatrice, la propriété indiquée.
2. Indiquer pour chacun des outils, le niveau où pourrait être donné l'exercice.
3. Proposer une autre méthode de résolution.
4. Proposer un ou plusieurs exercices qui permettent de mettre en jeu plusieurs méthodes pour résoudre un même problème de géométrie plane.

Proposition de corrigé avec le Classpad 300

I. Construction de la figure avec le Classpad

On ouvre l'application Géométrie. On choisit « `Fich/Nouveau` » pour faire place nette.

On affiche la grille des points entiers par « `Aff/Grille entier` ». Cela permettra de tracer plus confortablement le segment horizontal sur lequel s'appuient les deux carrés.

Avec l'outil on trace un segment horizontal, de gauche à droite, au bas de l'écran. L'origine est nommée A mais l'extrémité doit être renommée en E (utiliser puis le champ).

Sur le segment $[AE]$, et avec l'outil , on crée un point qu'on renomme en B.

On sélectionne à la fois B et le segment $[AE]$, et on choisit « `Edit/Animer/Ajouter animation` ». Le point B est maintenant lié au segment $[AE]$ sur lequel il va se déplacer (même si B avait été créé en dehors de $[AE]$, cette action aurait placé B sur $[AE]$ et l'aurait lié à ce segment).

Pour modifier le nombre d'étapes de B sur $[AE]$, utiliser « `Edit/Animer/Editer animations` ».

Pour visualiser le déplacement de B sur $[AE]$ (même si pour l'instant c'est sans grand intérêt), on utilisera les fonctions de lecture obtenues par « `Aff/Animation UI` ». On pourra également utiliser les fonctions du menu « `Edit/Animer` » (fig1).

On sélectionne le segment $[AE]$ et on le cache avec « `Edit/Propriétés/Caché` ».

Avec l'outil on trace les deux segments $[AB]$ et $[BE]$.

On sélectionne $[BE]$ puis l'outil (ou « `Tracé/Construire/Rotation` »). Le Classpad nous demande alors de sélectionner le centre de la rotation. Pour cela, on pose le stylet sur une zone vide près de B puis on le fait glisser jusqu'à ce que B soit sélectionné. Au moment où on relève le stylet, une fenêtre nous demande l'angle de la rotation (fig2).

On précise un angle de 90° (c'est la valeur par défaut), puis OK. Un segment $[BE']$, image de $[BE]$ dans la rotation de centre B et d'angle 90°, est alors tracé (fig3).

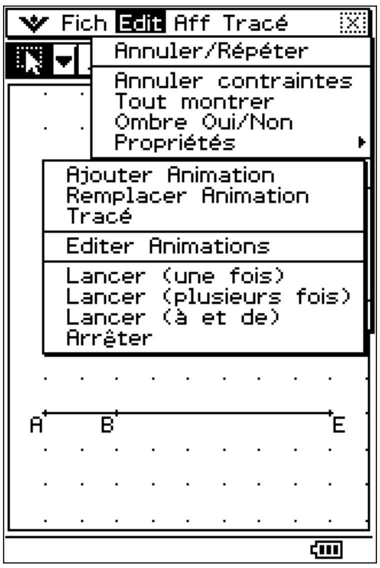


fig1 : menu « `Edit/Animer` »

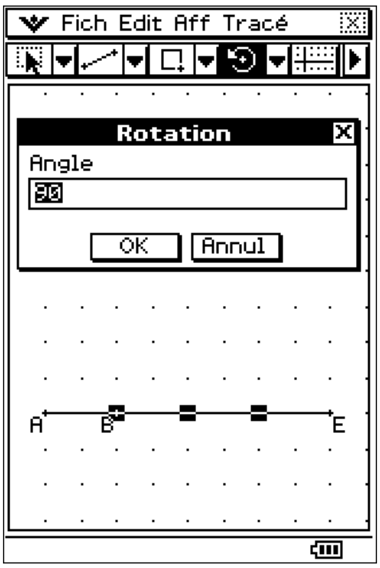


fig2 : centre B, angle 90°

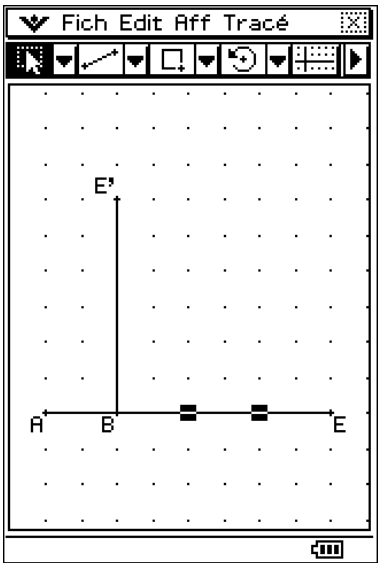


fig3 : le segment $[BE']$.

De même, on construit l'image $[EB']$ de $[EB]$ dans la rotation de centre E et d'angle -90°.

On renomme E' en G, B' en F, et on trace le segment $[GF]$ (fig4).

La même méthode (rotations de $[AB]$ d'angle 90° autour de A et d'angle -90° autour de B) permet de construire le carré $ABCD$ (fig5).

On trace enfin les droites $[AG]$ et $[EC]$ (outil).

Si on sélectionne ces deux droites, un passage par (pour accéder aux champs des propriétés des objets sélectionnés) montre que ces deux droites sont orthogonales (fig6).

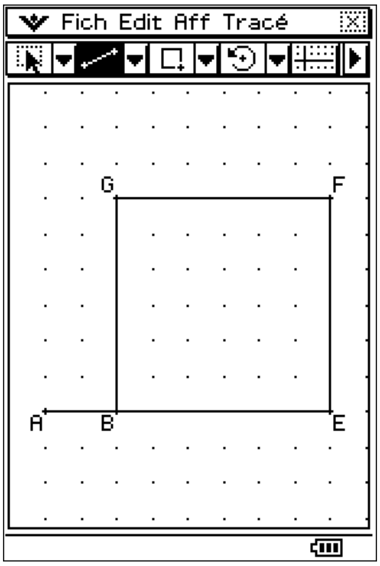


fig4 : le carré $BEFG$

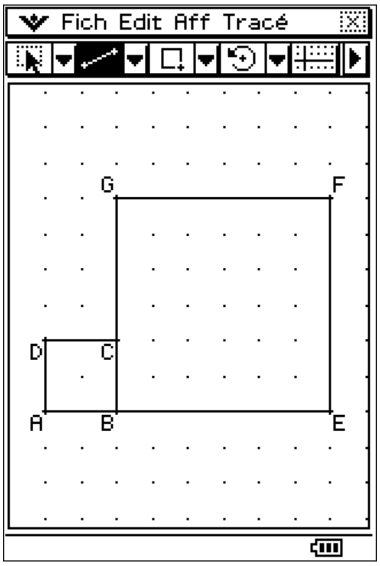


fig5 : le carré $ABCD$

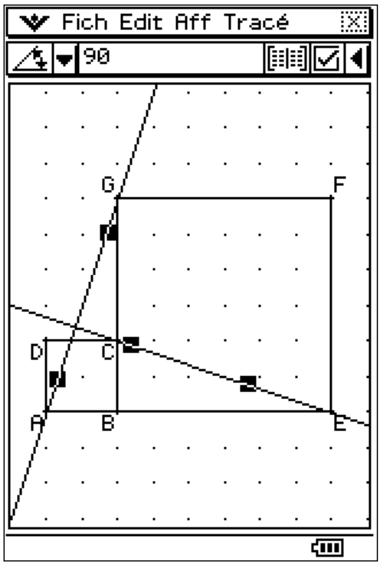


fig6 : $(AG) \perp (EC)$.

Si on clique sur l'icône , on crée à l'écran un champ contenant la valeur de l'angle (pour le moment 90° et ce n'est pas un hasard). On peut déplacer ce champ (par exemple sous la figure). On peut également le renommer, par exemple l'appeler « `angle(EC,AG)=` » (fig7).

Ensuite, le passage dans « `Aff/Animation UI` » permet de contrôler l'animation de B sur $[AE]$. On constate que l'orthogonalité de (EC) et (AG) est permanente (fig8 et fig9)

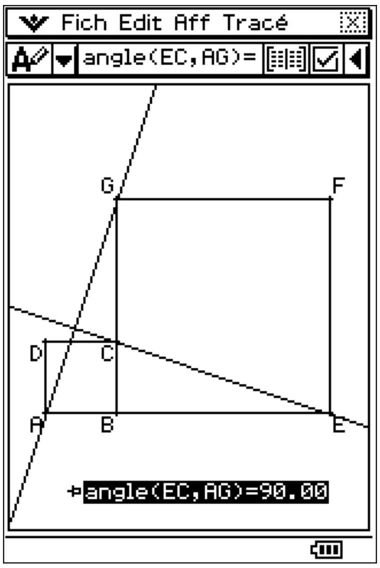


fig7 : $\widehat{(EC)(AG)} = \dfrac{\pi}{2}$

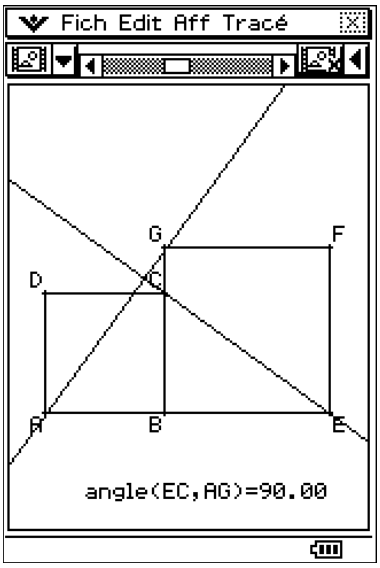


fig8 : $\widehat{(EC)(AG)} = \dfrac{\pi}{2}$ encore

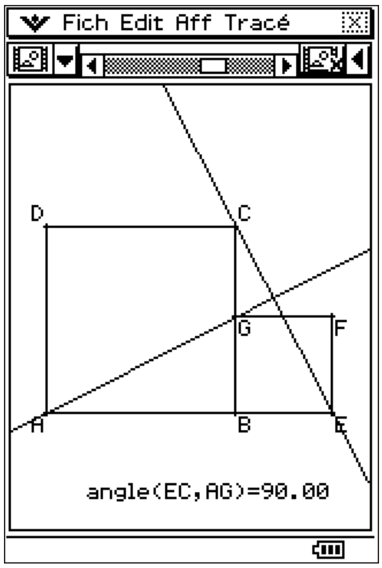


fig9 : $\widehat{(EC)(AG)} = \dfrac{\pi}{2}$ toujours

II. L'exercice proposé au candidat

1. *Outil « configurations »* :

   On a $\widehat{EAU} = \widehat{AEU} = 45^\circ$ (angles d'une diagonale d'un carré avec un coté de ce carré).

   On en déduit $\widehat{AUE} = 90^\circ$ car la somme des angles intérieurs au triangle AUE vaut 180°.

   Ainsi (AU) est la hauteur issue de A au triangle AGE.

   Mais (BG) est la hauteur issue de G à ce même triangle (on sait que $(BG)\perp(AE)$).

   Le point C, sur deux des trois hauteurs de AEG, est donc sur la troisième. Autrement dit, la droite (EC) est orthogonale à la droite (AG).

   Sur le Classpad, on voit (fig10) une construction des droites (AC) et (EG) (outil) de leur intersection U (outil), et on voit que les droites (AU) et (GE) sont orthogonales.

   Le point C est donc l'orthocentre du triangle AEG.

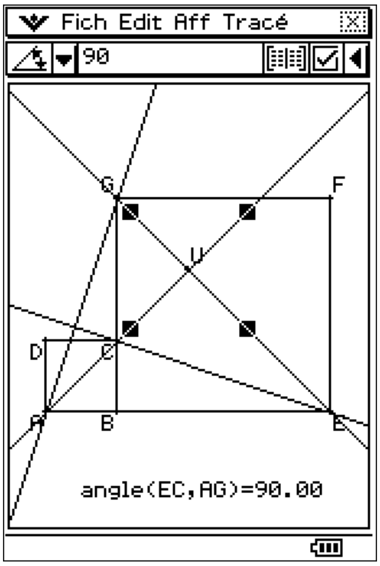


fig10 : $(AU)\perp(EG)$

2. *Outil « produit scalaire »* :

   Notons $\alpha = AB$ et $\beta = BE$.

   On écrit $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}$.

   Ainsi $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EB} + \underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{EB}}_{=0} + \overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BC}$.

   $$\text{Mais } \begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EB} = -AB\cdot BE = -\alpha\beta & \text{(colinéaires de sens contraires)} \\ \overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BC} = BG\times BC = \alpha\beta & \text{(colinéaires de même sens)} \end{cases}$$

   On en déduit $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EC} = 0$: les droites (AG) et (EC) sont orthogonales.

3. *Outil « analytique »* :

   On munit le plan d'un repère orthonormal $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\vec{\imath} = \dfrac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\jmath} = \dfrac{1}{AD}\overrightarrow{AD}$.

   On note b l'abscisse de B et e celle de E (on a donc $0 < b < e$).

   Les coordonnées de G sont $(b, e-b)$ et celles de C sont (b, b).

   On a donc $\overrightarrow{AG} = b\vec{\imath} + (e-b)\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{EC} = (b-e)\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$.

   Ainsi $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EC} = b(b-e) + (e-b)b = 0$ (produit scalaire dans une base orthonormée).

   Là encore, on en déduit que les droites (AG) et (EC) sont orthogonales.

4. *Outil « transformation »* :

   Comme le suggère « le travail demandé au candidat », il y a encore une autre méthode.

   Considérons en effet la rotation r de centre B et d'angle $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$.

   On a bien sûr $r(E) = G$ et $r(C) = A$. L'image de la droite (EC) est donc la droite (GA).

   Ainsi $\widehat{(EC)(GA)} = \theta \bmod \pi = \dfrac{\pi}{2} \bmod \pi$.

   On a donc à nouveau prouvé que les droites (EC) et (GA) sont orthogonales.

III. Prolongement de l'exercice

La méthode précédente est intéressante car, contrairement aux autres, elle n'utilise pas le fait que C est sur $[BG]$ c'est-à-dire que les carrés $ABCD$ et $BEFG$ sont « collés » l'un à l'autre.

Plus précisément, la seule chose utile dans la quatrième méthode est que les deux carrés aient le sommet B en commun. On va vérifier cette généralisation de l'exercice en modifiant la contrainte actuelle, à savoir l'appartenance de B au segment $[AE]$.

On part de la construction telle qu'affichée (fig7) par exemple (ou alors on efface les droites (AC), (EG) et le point U, qui ne sont plus utiles ici).

Avec l'outil , on trace le cercle de centre B et qui passe par A (fig11).

On sélectionne ce cercle et le point A, et on choisit « `Edit/Animer/Remplacer animation` ».

Cela a pour effet de lier A au cercle et de remplacer l'animation précédemment programmée (celle de B sur $[AE]$) par l'animation de A sur le cercle.

On cache le cercle pour alléger la figure. On affiche le menu d'animation « `Aff/Animation UI` ».

L'utilisation du curseur montre que quelle que soit la position de A (qui varie donc à une distance fixée de B), les droites (EC) et (AG) restent orthogonales (fig12 et fig13), comme en témoigne le champ indiquant ici l'angle entre ces deux droites (et qui reste égal à 90°, bien qu'il soit actualisé à chaque nouvelle position de A).

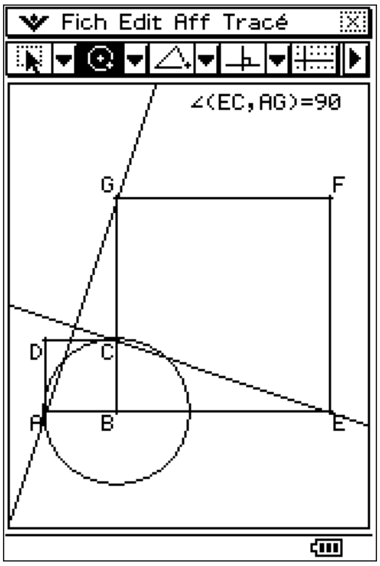


fig11 : Centre B, passe par A

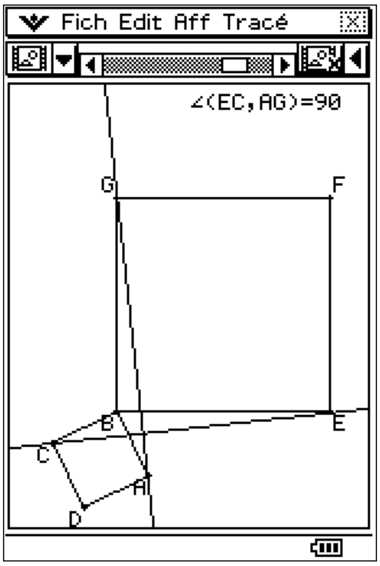


fig12 : $(EC)\perp(AG)$ encore

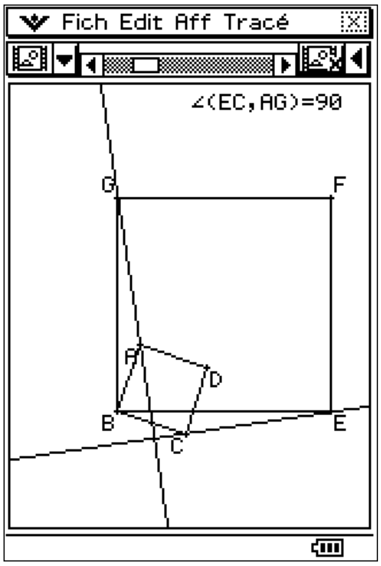


fig13 : $(EC)\perp(AG)$ toujours

On peut même aller plus loin en supprimant toute animation et en déplaçant librement le point A (ce qui affecte les points C et D du carré $ABCD$, le point B restant fixe) ou d'ailleurs en déplaçant librement n'importe lequel des autres points B, C, D, E, F, G.

Rappel : pour déplacer un point, il faut commencer par ne sélectionner que lui avec le stylet, puis relever le stylet et le reposer sur ce point en le *tirant* sur l'écran.

Dans tous les cas, les quadrilatères $ABCD$ et $BEFG$ restent des carrés et les droites (EC) et (AG) restent orthogonales. On voit (fig 14,15,16) quelques exemples de configurations obtenues.

On peut afficher la grille entière (« `Aff/Grille entier` ») pour placer les points en des positions simples ou pour favoriser un retour à la situation initiale.

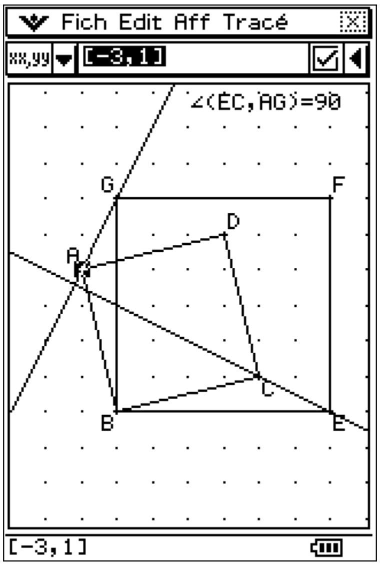


fig14 : on déplace A

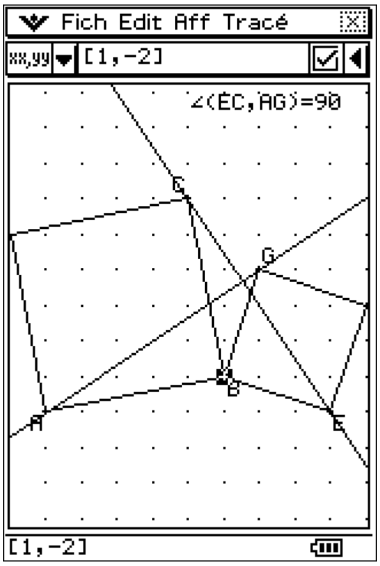


fig15 : on déplace B

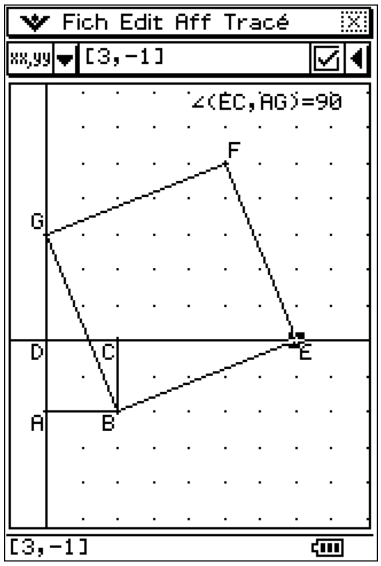


fig16 : on déplace E

(quelques configurations obtenues en modifiant les points de base)