Thème : Divers types de raisonnement
(par l'absurde, par récurrence, ...)

Cet énoncé est celui de la deuxième épreuve orale (épreuve sur dossier) du Capes Externe de mathématiques, proposé aux candidat(e)s le 16 Juillet 2005.

Pour consulter les archives de cette épreuve orale, depuis la session 2005, on se reportera au site officiel du jury, à l'adresse http://capes-math.org/

1. L'exercice proposé au candidat

On appelle E l'ensemble des triplets (x, y, z) de réels strictement positifs qui vérifient les deux inégalités strictes $xyz > 1$ et $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

On cherche à établir quelques propriétés de E.

1. Soit (a, b, c) un élément de E.
   (a) Démontrer que $\max(a, b, c) > 1$;
   (b) Démontrer que $\min(a, b, c) < 1$;
   (c) Démontrer que a, b et c sont tous les trois différents de 1.
2. Déterminer tous les éléments de E qui sont de la forme $\left(x, \frac{1}{2x}, \frac{1}{2x}\right)$, où x est un réel strictement positif. En déduire que l'ensemble E est infini.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :

1. Dégagez les outils et méthodes nécessaires à la résolution de l'exercice.
2. Proposez au moins deux exercices assez courts illustrant des figures classiques du raisonnement (raisonnement par contraposition, par disjonction de cas, par l'absurde, par récurrence, utilisation d'exemples et de contre-exemples, etc.). On pourra puiser dans les domaines du dénombrement, de l'arithmétique, de la géométrie.

Proposition de corrigé avec le Classpad 300

I. L'exercice proposé au candidat

1. On se donne donc a, b, c dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $abc > 1$ et $a+b+c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

   (a) Pour montrer $\max(a, b, c) > 1$, on peut raisonner par l'absurde, ou de façon directe.

   – Par l'absurde, supposons $\max(a, b, c) \leqslant 1$.

   Alors $\begin{cases} 0 < a \leqslant 1 \\ 0 < b \leqslant 1 \\ 0 < c \leqslant 1 \end{cases}$, donc $0 < abc \leqslant 1$ ce qui est contradictoire.

   – De façon directe, soit $M = \max(a, b, c)$.

   On a $0 < a \leqslant M$, $0 < b \leqslant M$ et $0 < c \leqslant M$ donc $abc \leqslant M^3$.

   Puisque (a, b, c) est dans E, on a $abc > 1$ donc $M^3 > 1$ donc $M > 1$.

   (b) Pour montrer $\min(a, b, c) < 1$, on peut raisonner par l'absurde, ou de façon directe.

   – Par l'absurde, supposons $\min(a, b, c) \geqslant 1$.

   Alors $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$ et $c \geqslant 1$, donc $0 < \frac{1}{a} \leqslant 1$, $0 < \frac{1}{b} \leqslant 1$ et $0 < \frac{1}{c} \leqslant 1$.

   Ainsi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqslant 3 \leqslant a+b+c$ ce qui contredit l'hypothèse $a+b+c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

   – De façon directe, soit $m = \min(a, b, c)$. Bien sûr m est strictement positif.

   On a $m \leqslant a$, $m \leqslant b$ et $m \leqslant c$ donc $3m \leqslant a+b+c$.

   De même $\frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{m}$, $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{m}$ et $\frac{1}{c} \leqslant \frac{1}{m}$, donc $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \leqslant \frac{3}{m}$.

   Or $a+b+c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b}$ donc $3m < \frac{3}{m}$ donc $m^2 < 1$ donc $m < 1$.

   (c) Pour montrer que a, b et c sont distincts de 1, on raisonne par l'absurde.

   On suppose donc que *l'un au moins* des trois réels a, b, c (par exemple a) vaut 1.

   Les hypothèses $abc > 1$ et $a+b+c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ deviennent $bc > 1$ et $b+c < \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

   Mais $bc > 1$ implique $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{b+c}{bc} < b+c$ et il y a une contradiction.

   On peut aussi raisonner de façon directe, mais c'est moins évident.

   Posons $\lambda = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1\right)\left(\frac{1}{a} - 1\right)$. On a $\lambda = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + 1 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

   Mais $abc > 1$ donc $\frac{1}{ab} < c$ et $\frac{1}{ac} < b$. De même $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > a+b+c$.

   On en déduit $\lambda < c+b+1-(a+b+c)$ donc $\lambda < 1-a$.

   Ainsi $\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1\right)\left(\frac{1}{a} - 1\right) < 1-a$ ce qui implique évidemment $a \neq 1$.

   Par symétrie du problème, on a également $b \neq 1$ et $c \neq 1$.

2. Avec $b = c = \dfrac{1}{2a}$ (et $a > 0$) on a : $abc = \dfrac{1}{4a}$, $a+b+c = a + \dfrac{1}{a}$, et $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a} + 4a$.
   Ainsi $abc > 1$ équivaut à $0 < a < \dfrac{1}{4}$.
   De même $a+b+c < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \Leftrightarrow a < 4a$ (automatiquement réalisé car $a > 0$).
   L'hypothèse disant que (a,b,c) est dans E se résume donc à $0 < a < \dfrac{1}{4}$.
   Ainsi il y a un nombre infini de triplets de E ayant la propriété $b = c = \dfrac{1}{2a}$.
   A fortiori, il y a un nombre infini de triplets (a,b,c) dans E !

II. L'exercice avec le Classpad

Dans l'application Principale, on définit les fonctions $I(x,y,z)$ et $J(x,y,z)$ comme indiqué (fig1).

Ces fonctions créent donc les inégalités caractérisant l'appartenance de (x,y,z) à l'ensemble E.

On voit (fig1) comment résoudre la question 2 dans le cas où $b = c = \dfrac{1}{2a}$.

Dans ce cas, `solve` fournit en effet les inégalités $0 < a < \dfrac{1}{4}$.

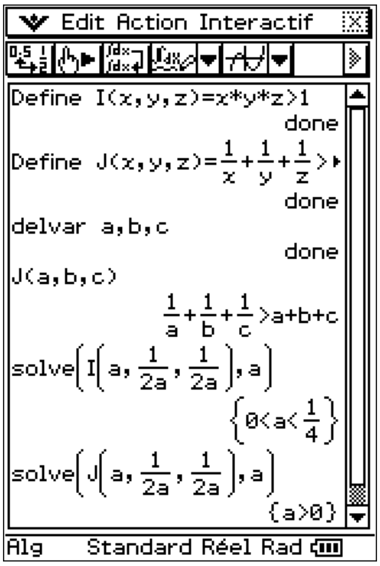

fig1 : solution question 2

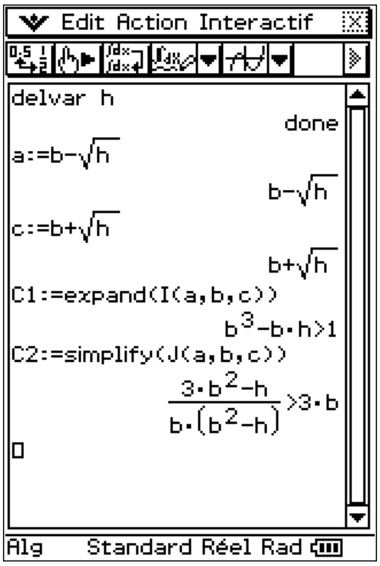

fig2 : un cas particulier

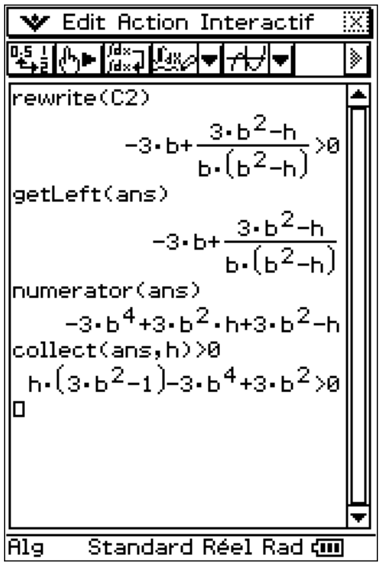

fig3 : un peu de calcul formel

Cherchons d'autres solutions que celles qui sont suggérées dans la question 2.

Pour cela, et par symétrie du problème, on peut supposer $a \leqslant b \leqslant c$.

On va faire une hypothèse supplémentaire, en supposant que b est le milieu du segment $[a,c]$.

On pose $\begin{cases} a = b - \sqrt{h} \\ c = b + \sqrt{h} \end{cases}$, avec $0 \leqslant h < b^2$ (l'intérêt de cette écriture apparaît plus loin).

On voit alors (fig2) que $(a,b,c) \in E$ équivaut à (C_1) : $b^3 - bh > 1$ et (C_2) : $\dfrac{3b^2 - h}{b(b^2-h)} > 3b$.

La condition (C_1) s'écrit $h < \dfrac{b^3 - 1}{b}$ et exige $b > 1$ (puisqu'on doit avoir $h \geqslant 0$)

Après quelques manipulations algébriques (voir fig3), on voit que $(C_2) \Leftrightarrow h > \dfrac{3b^2(b^2-1)}{3b^2-1}$.

Finalement $(a, b, c) \in E \Leftrightarrow \dfrac{3b^2(b^2-1)}{3b^2-1} < h < \dfrac{b^3-1}{b}$ (où $a = b - \sqrt{h}$ et $c = b + \sqrt{h}$).

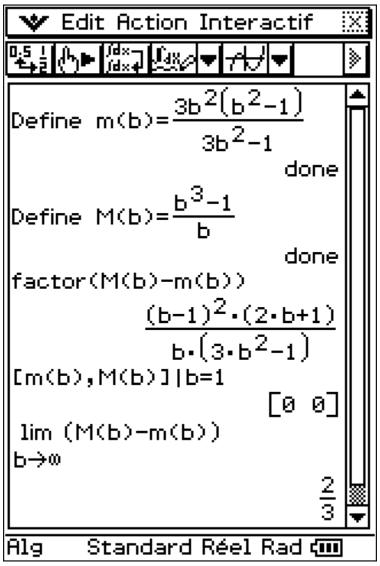

fig4 : $m(b) < h < M(b)$

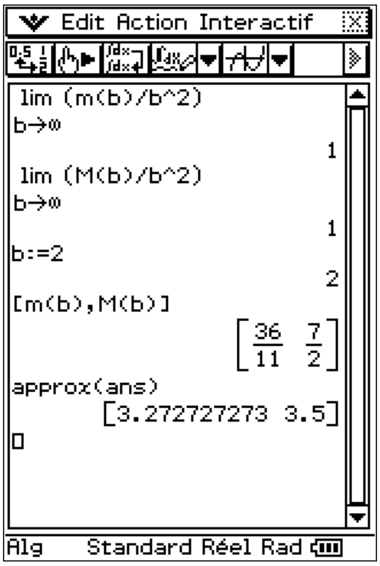

fig5 : cas particulier $b = 2$

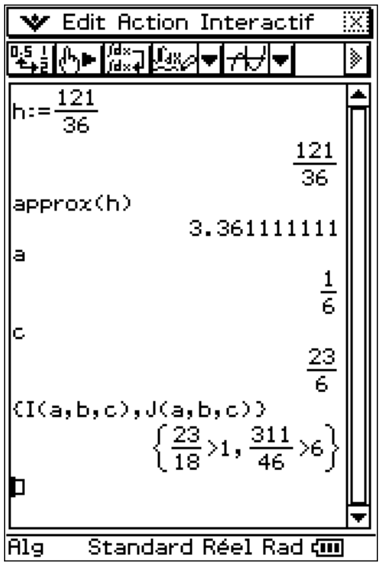

fig6 : vérification

On pose $m(b) = \dfrac{3b^2(b^2-1)}{3b^2-1}$ et $M(b) = \dfrac{b^3-1}{b}$ (fig4).

On va étudier l'intervalle $]m(b), M(b)[$ des valeurs possibles de h.

On constate que cet intervalle est vide si $b = 1$ (normal).

En factorisant $M(b) - m(b)$, on voit que cet intervalle est non vide si $b > 1$ (cette condition étant rappelons-le indispensable pour qu'il y ait des solutions $h > 0$).

Plus précisément, on voit que l'amplitude cet intervalle tend vers $\dfrac{2}{3}$ quand $b \to +\infty$ (voir fig4).

On constate que $m(b)$ et $M(b)$ sont équivalents à b^2 quand $b \to +\infty$ (voir fig5).

Pour $b = 2$ l'intervalle des valeurs possibles est $\left]\dfrac{36}{11}, \dfrac{7}{2}\right[$.

On pose par exemple $h = \dfrac{121}{36}$ (il est bien dans l'intervalle précédent).

On vérifie alors que $a = b - \sqrt{h} = \dfrac{1}{6}$ et $c = b + \sqrt{h} = \dfrac{23}{6}$.

On contrôle finalement (fig6) qu'avec ces valeurs, le triplet (a, b, c) est bien dans E puisque les deux conditions (qui s'expriment ici par les inégalités $I(a, b, c)$ et $J(a, b, c)$) sont satisfaites.