Thème : Equations différentielles

Problèmes issus de la géométrie, de la physique, de la biologie, de l'économie, des probabilités..., conduisant à la résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Cet énoncé est celui de la deuxième épreuve orale (épreuve sur dossier) du Capes Externe de mathématiques, proposé aux candidat(e)s le 17 Juillet 2005.

Pour consulter les archives de cette épreuve orale, depuis la session 2005, on se reportera au site officiel du jury, à l'adresse http://capes-math.org/

1. L'exercice proposé au candidat

Une loi de Newton stipule que la vitesse de refroidissement d'un corps reste proportionnelle à la différence entre la température de ce corps à l'instant t et la température constante de l'air ambiant (le coefficient de proportionnalité dépend essentiellement de la surface de contact entre le corps et son milieu, et on considérera ici que ce coefficient est constant).

1. Préciser et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la température $\theta(t)$ à l'instant $t > t_0$, d'un corps porté initialement (c'est-à-dire à l'instant t_0) à la température θ_0, et qui est plongé dans un environnement dont la température constante est égale à θ_a.
2. La température de votre cuisine (et de votre appartement) est constante, égale à 20°C. Quand vous le sortez du four à 20h, la température du gâteau que vous avez préparé pour vos invités est 180°C. Vous observez qu'à 20h30 elle est encore de 100°C. A quelle heure pourrez-vous le servir à la température idéale, soit 25°C ?
3. Comme vous voulez absolument servir votre gâteau à 22h précises, vous commencez par le placer dès 20h sur le rebord de votre fenêtre, où l'air ambiant est à une température de 0°C. Combien de temps devrez-vous le laisser sur ce rebord avant de le rentrer à l'intérieur pour que vos invités puissent le déguster à 22h à la température idéale ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :

1. Préciser l'équation différentielle utilisée dans la première question de l'exercice et sa solution générale. Comment traiteriez-vous cette résolution dans une classe de terminale ?
2. Indiquer la façon dont vous pourriez mettre en place un tel exercice dans une classe de terminale S (notions traitées au préalable, rôle joué par les outils de calculs numériques et/ou formel, synthèse de la résolution, éventuellement proposition de questions intermédiaires...)
3. Proposer un ou deux exercices issus de la géométrie, de la physique, de la biologie, de l'économie ou des probabilités, etc. et conduisant à la résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Proposition de corrigé avec le Classpad 300

I. L'exercice proposé au candidat

1. On exprimera ici le temps en minutes.

   La vitesse de refroidissement du gâteau est la dérivée $\theta'(t)$ de sa température.

   D'après Newton, il y a une constante k telle que (E) : $\theta'(t) = k(\theta(t) - \theta_a)$ pour tout t.

   Remarque : la constante k est négative car si $\theta(t) > \theta_a$ (resp. si $\theta(t) < \theta_a$) c'est-à-dire si la température $\theta(t)$ du gâteau est supérieure (resp. inférieure) à la température ambiante θ_a, alors $\theta(t)$ diminue donc $\theta'(t) < 0$ (resp. augmente donc $\theta'(t) > 0$).

   L'équation (E) s'écrit $y'(t) = ky(t)$ avec $y(t) = \theta(t) - \theta_a$, et $y(t_0) = y_0 = \theta_0 - \theta_a$.

   Sa solution est donc $y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}$ c'est-à-dire $\theta(t) = \theta_a + (\theta_0 - \theta_a)e^{k(t-t_0)}$ pour $t \geqslant t_0$.

   On peut faire ce calcul avec le Classpad.

   Dans Principale, on sélectionne « `Equation/Inégalité` » du menu « `Interactif` » (fig1).

   Dans ce menu, on choisit « `dSolve` ».

   Une fenêtre s'ouvre pour faciliter la saisie de l'équation différentielle (fig2).

   On coche la case « `Avec condition` », ce qui a pour effet d'ouvrir deux champs supplémentaires permettant de choisir une condition initiale.

   On renseigne le formulaire comme indiqué (fig3).

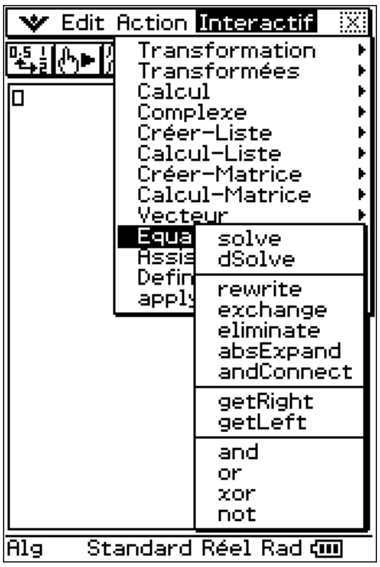

fig1 : menu « `Interactif` »

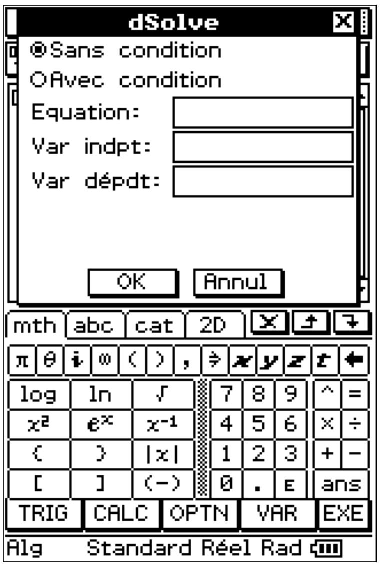

fig2 : formulaire équadiff

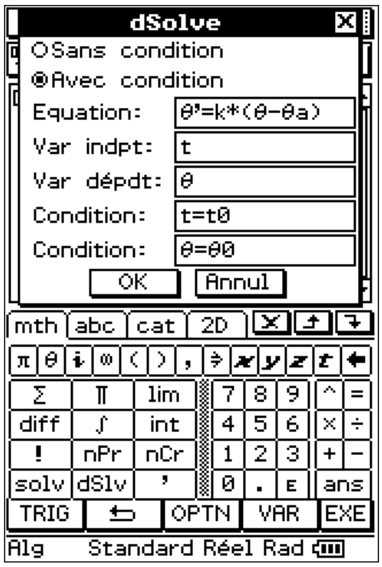

fig3 : équadiff et condition

2. Ici $\theta_a = 20$, $\theta_0 = 180$, donc $\theta(t) = 20 + 160e^{k(t-t_0)}$ pour $t \geqslant t_0$.

   On sait que $\theta(t_0 + 30) = 100$, donc $100 = 20 + 160e^{30k}$ puis $e^{30k} = \dfrac{1}{2}$ donc $k = -\dfrac{\ln 2}{30}$.

   On cherche ensuite t pour que $25 = \theta(t) = 20 + 160e^{k(t-t_0)}$.

   On trouve $e^{k(t-t_0)} = 1/32$ donc $k(t - t_0) = -5 \ln 2$ et $t - t_0 = 150$ (deux heures et demie).

   Le gâteau est donc à température idéale à 22h30.

On voit (fig4) comment obtenir ce résultat avec le Classpad :

- Après qu'on a validé le formulaire de saisie de l'équation différentielle, le Classpad évalue la fonction `dSolve` avec les données fournies par l'utilisateur.
- On lit la solution de l'équation différentielle avec la condition initiale $\theta(t_0) = \theta_0$.
- On crée une fonction G (comme « gâteau ») donnant cette solution en fonction des trois variables t, θ_a, θ_0. Plus précisément : $G(t, \theta_a, \theta_0) = (\theta_0 - \theta_a)\mathrm{e}^{k(t-t_0)} + \theta_a$.
- On peut fixer l'origine des temps au moment où on sort le gâteau du four, ce qui revient à poser $t_0 = 0$. Ainsi $G(0, 20, 180) = 180$, température initiale du gâteau.
- De même $G(30, 20, 180) = 160\mathrm{e}^{30k} + 20$ représente la température du gâteau au bout de 30mn, quand la température de l'appartement est de 20°C.
- On résout l'équation $G(30, 20, 180) = 100$ et on trouve $k = -\dfrac{\ln 2}{30}$.

On pose donc $k = -\dfrac{\ln 2}{30}$ et on voit (fig5) comment obtenir le délai au bout duquel la température du gâteau est redescendue à 25°C : il suffit en effet de résoudre l'équation $G(t, 20, 180) = 25$ par rapport à la variable t.

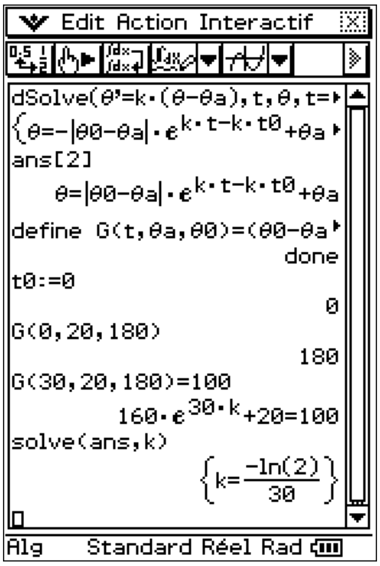

fig4 : la valeur de k

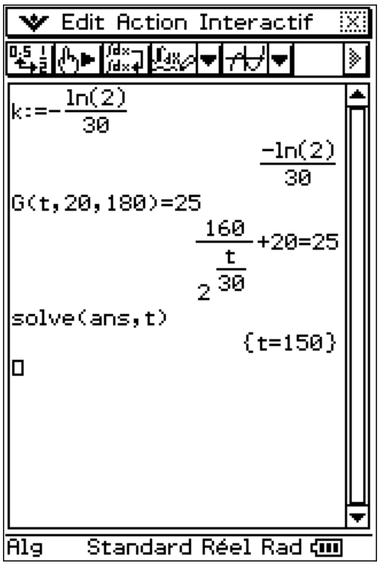

fig5 : le délai de 150mn

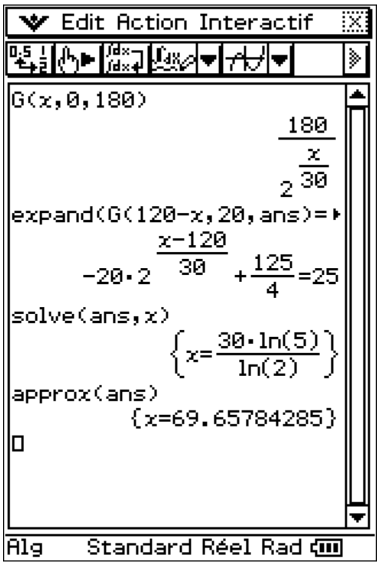

fig6 : 70mn sur la fenêtre

3. Sur le bord de la fenêtre, on a $\theta_a = 0$.

   Tant que le gâteau s'y trouve, on a donc $\theta(t) = 180\mathrm{e}^{k(t-t_0)}$ pour $t \geqslant t_0$.

   Après un laps de temps $x < 120$, il est à la température $\theta_0 = 180\mathrm{e}^{kx}$.

   A l'intérieur, sa température est donnée par $\theta(t) = 20 + (\theta_0 - 20)\mathrm{e}^{k(t-t_0-x)}$ pour $t \geqslant t_0 + x$.

   Après un nouveau laps de temps égal à $120 - x$, il doit être à une température de 25°C.

   Autrement dit $25 = \theta(t_0 + 120) = 20 + (180\mathrm{e}^{kx} - 20)\mathrm{e}^{k(120-x)}$.

   Cette égalité devient $36 - 4\mathrm{e}^{-kx} = e^{-120k} = 16$ donc $\mathrm{e}^{-kx} = 5$.

   Ainsi $x = \dfrac{-\ln 5}{k} = \dfrac{30 \ln 5}{\ln 2} = 69.6578... \approx 70$.

   On doit donc laisser le gâteau sur la fenêtre pendant environ 1 heure et 10 minutes.

On voit (fig6) comment arriver au résultat précédent avec le Classpad :

- L'expression $G(x, 0, 180)$ donne la température du gâteau après un délai de x minutes, quand il est placé sur le rebord de la fenêtre (température ambiante 0°C).
- L'expression $G(120-x, 20, \mathtt{ans}) = 25$ fournit alors une égalité (où x est inconnu) indiquant que la température du gâteau est redescendue à 25°C après un nouveau délai de $120 - x$ minutes (mais maintenant dans l'appartement chauffé à 20°C).
- On cherche la valeur de x pour laquelle cette égalité est vérifiée et on trouve $x = \dfrac{30 \ln 5}{\ln 2}$.
- On conclut en demandant la valeur approché de x : environ 70 minutes.

II. L'application « Équations différentielles » du Classpad

Le Classpad propose un environnement dédié à l'étude des équations différentielles.

Nous allons en faire un peu le tour, en nous limitant à un exemple très simple d'équation du premier ordre. Il est possible d'étudier des d'équations d'ordre 2 (ou supérieur) ou des systèmes d'équations d'ordre 1 (nous n'aborderons pas ces sujets ici !).

L'application baptisée « `EqDiff Graph` » figure dans l'écran d'accueil avec l'icône EqDiff Gra... (fig7).

Cette application s'ouvre sur un écran permettant de saisir les données relatives à une équation différentielle. Nous allons étudier les solutions de l'équation $y' = -\dfrac{y}{2} + x + 2$ (fig8).

On peut sélectionner « `C Init` » pour fixer des conditions initiales. On pose ici $y(0) = 1$ (fig9).

On peut fixer plusieurs conditions initiales (chacune d'elle conduisant à une solution particulière de l'équation différentielle).

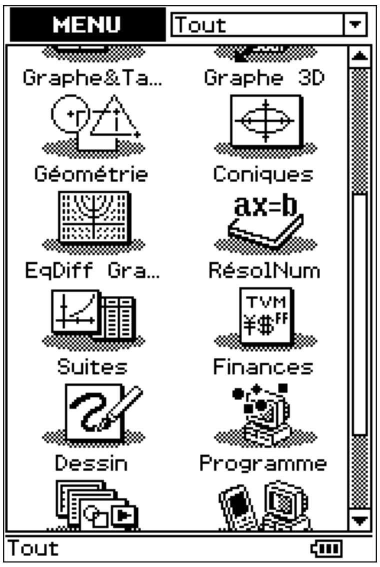

fig7 : l'application EqDiff Gra...

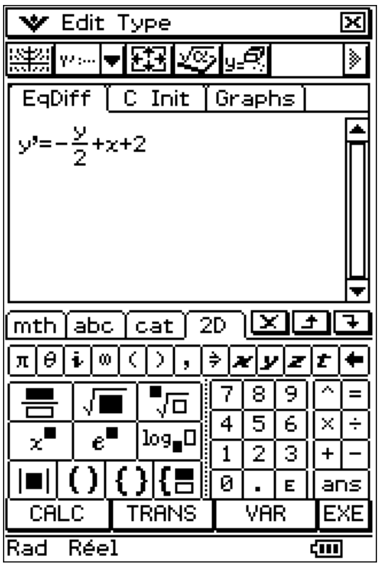

fig8 : $y' = -\dfrac{y}{2} + x + 2$

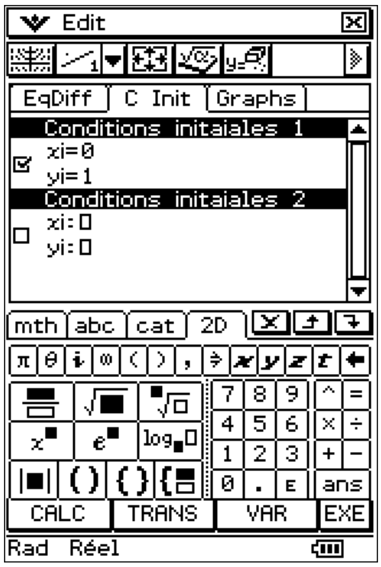

fig9 : la condition $y(0) = 1$

L'équation que nous allons étudier (avec la condition $y(0) = 1$) admet une solution unique.

On peut obtenir son expression dans l'application Principale (cf. le corrigé de l'exercice-jury).

Comme on le voit (fig8 et fig9), on peut ouvrir l'application principale depuis l'environnement dédié aux équations différentielles en utilisant l'icône.

La syntaxe de la fonction `dSolve` n'étant pas très simple à retenir, il vaut mieux passer par le menu « `Interactif` », dans lequel on choisit « `Equation/Inégalité` » puis « `dSolve` ».

On voit (fig10) comment renseigner le formulaire pour résoudre $y' = -\dfrac{y}{2}+x+2$ avec la condition plus générale $y(0) = a$ (on suppose ici que la variable a n'a pas de contenu).

Après validation, le résultat est renvoyé dans la fenêtre de l'application principale (fig11).

La solution de $y' = -\dfrac{y}{2} + x + 2$ avec $y(0) = a$ est donc $x \mapsto y(x) = 2x + a\,\mathrm{e}^{-x/2}$.

Il est clair que la droite $y = 2x$ est asymptote à la courbe représentative d'une telle solution.

De retour dans « `Equa diff` », et après avoir sélectionné l'onglet « `Graphs` », on précise (fig12) qu'on souhaite tracer la représentation graphique de $x \mapsto 2x$ (on peut ajouter plusieurs représentations graphiques à celles des solutions de l'équation différentielle en cours d'étude).

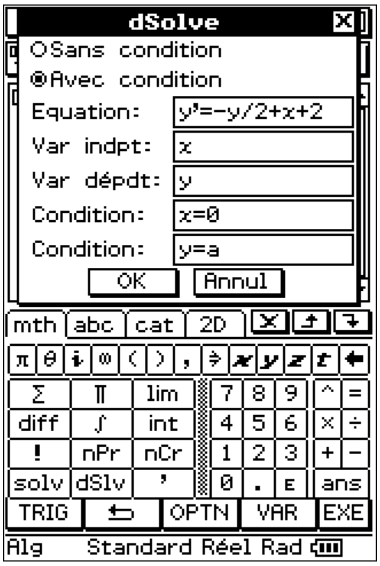

fig10 : l'équation à résoudre

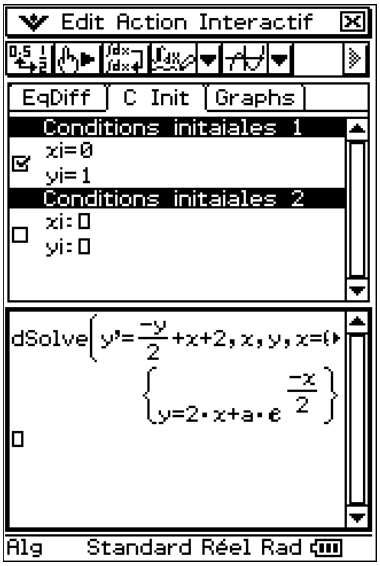

fig11 : la solution formelle

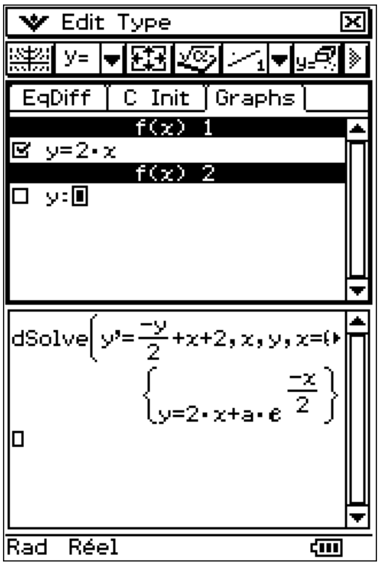

fig12 : tracer $y = 2x$

Avant de procéder au tracé effectif (par), il est possible d'effectuer quelques réglages :

– Avec , on peut préciser les intervalles en x et y de la fenêtre de tracé (fig13).

  On peut également indiquer si on veut tracer des marqueurs matérialisant les lignes de champ.

  On peut décider d'orienter ces marqueurs et en définir le nombre (sur chaque axe).

  La fenêtre ouverte par contient un deuxième onglet permettant de spécifier (si besoin) les variables : dans le cas d'une équation différentielle $y'(x) = ay(x) + b$, ce sont x et y, valeurs par défaut. Mais on pourrait très bien résoudre $y'(t) = ay(t) + b$.

  On peut également choisir de tracer les solutions des deux cotés de la valeur initiale ($x = 0$ dans notre exemple) ou seulement après (ou seulement avant) cette valeur.

– Avec ou , on peut choisir un tracé fin ou plus gras (pour chaque solution précisée dans « `C Init` » et/ou pour les tracés spécifiés dans l'onglet « `Graphs` »).

La sélection de trace les solutions définies par les conditions initiales dans « `C Init` », les fonctions de « `Graphs` » et (si on l'a décidé) les lignes de champ.

On obtient ici (fig14) le tracé de la solution $y(x) = 2x + \mathrm{e}^{-x/2}$ (correspondant à la condition initiale $y(0) = 1$), celui de la droite asymptote $y = 2x$, et les lignes de champ qui indiquent la forme générale du graphe des solutions (on constate effectivement que la droite d'équation $y = 2x$ est une direction commune quand $x \to +\infty$).

On peut bien sûr maximiser la fenêtre de tracé. Le menu « `Edit` » permet entre autres d'ajouter (ou de retirer) les flèches des marqueurs qui matérialisent les lignes de champ. Ces flèches indiquent la direction de la variable croissante, donc ici des abscisses croissantes (fig15).

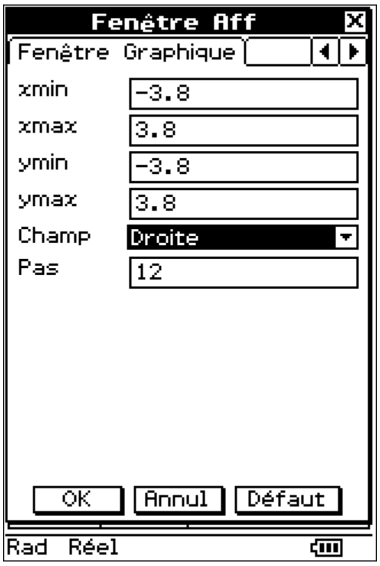

fig13 : la fenêtre `Aff` ()

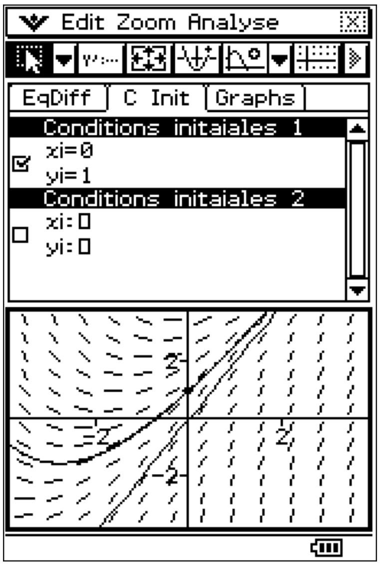

fig14 : après le tracé par

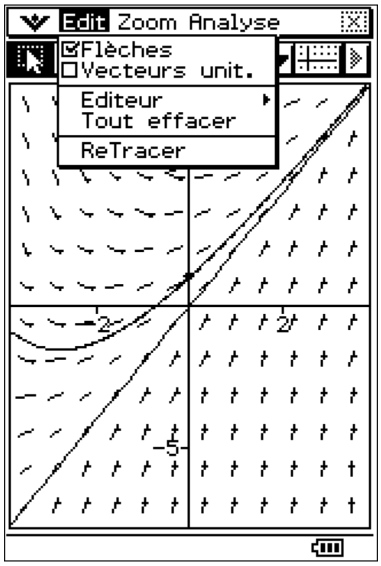

fig15 : lignes orientées

Dans la fenêtre de tracé, on peut interagir avec les représentations graphiques des solutions.

Il est bien sûr possible de zoomer sur le tracé ou de déplacer la fenêtre. Par ailleurs un point matérialisant la condition initiale est légèrement mis en évidence sur la courbe. Ce point est plus visible en supprimant les lignes de champ (cf fig16 : ici on ajouté la deuxième condition initiale $x = 1$, $y = -1$).

Il est alors possible de déplacer le point désignant une condition initiale en le « tirant »avec le stylet à la surface de l'écran.

Un appui sur , puis sur un point quelconque de la fenêtre graphique, crée et trace la solution correspondant à ce point considéré comme condition initiale. On peut ainsi tracer facilement de nombreuses solutions (fig17). Inversement, on utilisera pour supprimer des conditions initiales (on peut aussi décocher leurs cases de sélection).

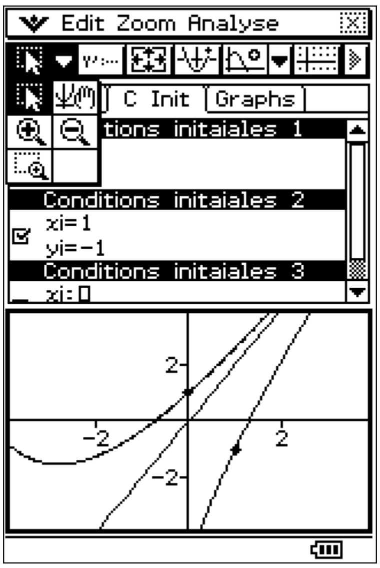

fig16 : noter $(0, 1)$ et $(1, -1)$

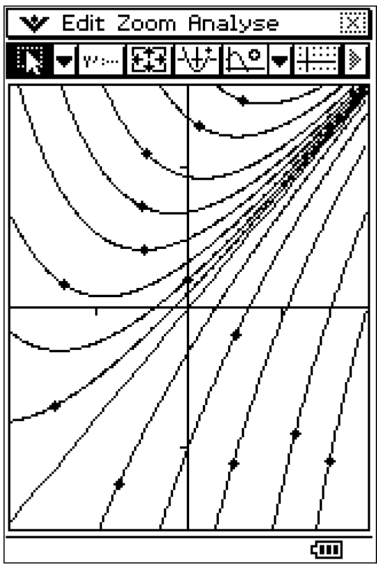

fig17 : d'autres solutions