Thème : Problèmes de recherche de lieux géométriques

Cet énoncé est celui de la deuxième épreuve orale (épreuve sur dossier) du Capes Externe de mathématiques, proposé aux candidat(e)s le 18 Juillet 2005.

Pour consulter les archives de cette épreuve orale, depuis la session 2005, on se reportera au site officiel du jury, à l'adresse http://capes-math.org/

1. L'exercice proposé au candidat

On considère un carré $ABCD$. On désigne par M un point du segment $[AC]$. On note P (respectivement Q) le projeté orthogonal du point M sur la droite (AD) (respectivement (DC)).

1. Construire la figure.
2. Démontrer que les droites (CP) et (BQ) sont orthogonales.
3. On note N le point d'intersection des droites (CP) et (BQ). Émettre une conjecture concernant le lieu du point N lorsque M décrit le segment $[AC]$.
4. Démontrer la conjecture émise.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :

1. Présenter, sur la calculatrice, la figure réalisée et l'animation permettant d'obtenir le lieu du point N.
2. Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.
3. Proposer un ou plusieurs autres exercices sur le même thème au niveau de la classe de lycée de votre choix et dont la résolution fait appel aux transformations du plan.

Proposition de corrigé avec le Classpad 300

I. La construction avec le Classpad

On passe dans l'application Géométrie, où on fait place nette avec « `Fich/Nouveau` ».

On sélectionne l'icône (ou « `Tracé/Forme spéciale/Carré` » puis on touche l'écran avec le stylet. Un carré $ABCD$ apparaît, occupant tout l'écran (fig1).

On trace le segment $[AC]$ (choisir d'abord l'icône ou « `Tracé/Segement de droite` », puis sélectionner A et C).

On crée ensuite un point (peu importe où, en fait) automatiquement appelé E par le Classpad, mais qu'on renomme M en utilisant et (fig2).

On sélectionne à la fois M et $[AC]$ et on choisit « `Edit/Animer/Ajouter Animation` » (fig3).

De cette façon, M est maintenant lié au segment $[AC]$, sur lequel il va pouvoir se déplacer.

Le nombre d'étapes de M sur $[AC]$, par défaut fixé à 20, peut être modifié dans le menu « `Edit/Animer/Edit Animations` » (cf fig3). Fixons par exemple 50 étapes.

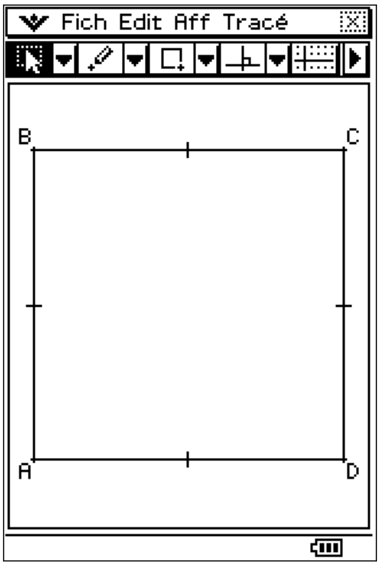

fig1 : le carré $ABCD$

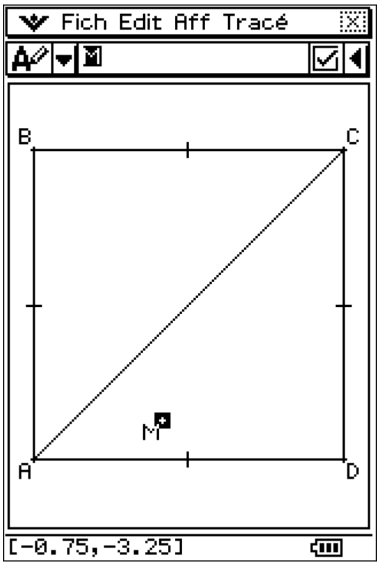

fig2 : $[AC]$ et *un* point M

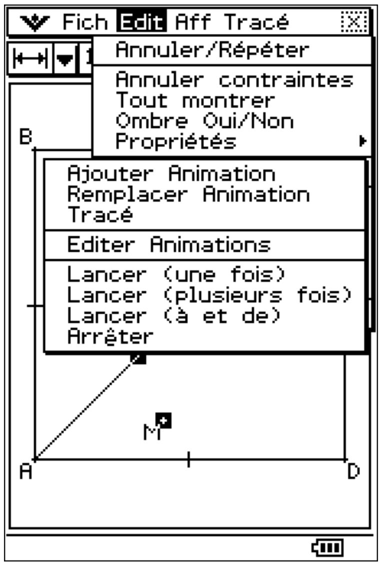

fig3 : liaison de M à $[AC]$

On sélectionne M et $[AD]$, puis l'icône (ou « `Tracé/Construire/Perpendiculaire` »).

La perpendiculaire à $[AD]$ passant par M est alors tracée. On la sélectionne ainsi que le segment $[AD]$ puis l'outil (ou « `Tracé/Construire/Intersection` »). Un point d'intersection est alors créé, qu'on renomme en P (fig4).

On construit de même le projeté orthogonal Q de M sur (DC).

On peut cacher (MP) et (MQ) (les sélectionner puis « `Edit/Propriétés/Caché` », cf fig5).

On trace les segments $[CP]$ et $[BQ]$. On les sélectionne tous les deux puis on fait apparaître la deuxième rangée d'icônes (utiliser si besoin). Dans le champ , on constate que ces deux segments sont effectivement orthogonaux.

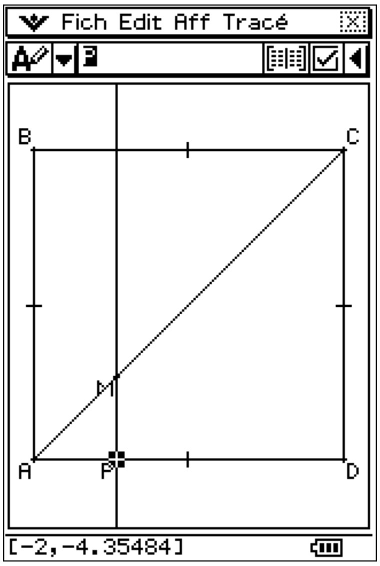

fig4 : projeté de M sur $[AD]$.

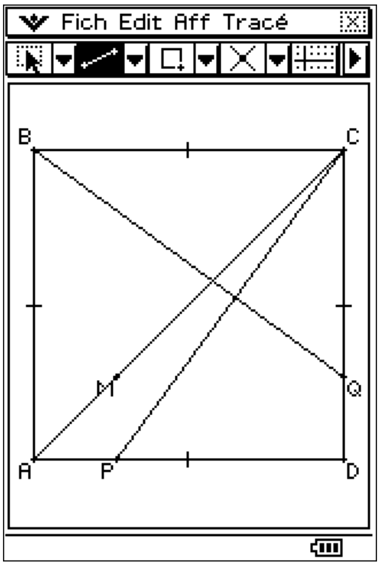

fig5 : $[CP]$ et $[BQ]$

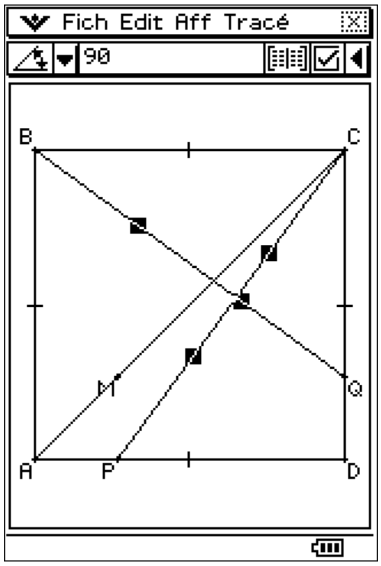

fig6 : $[CP]\perp[BQ]$

Les deux segments $[CP]$ et $[BQ]$ étant sélectionnés, on choisit la fonction $\boxed{\times}$ pour créer leur point d'intersection (renommé en N).

Le point N étant sélectionné, on choisit « `Edit/Animer/Tracé` ». De cette manière, le lieu de N sera tracé quand on animera M sur le segment $[AC]$.

On lance effectivement l'animation par « `Edit/Animer/Lancer` » (une fois ou plusieurs fois).

Le lieu de N est tracé, et semble être un quart de cercle de centre le milieu de $[BC]$ (fig7).

On peut d'ailleurs construire le milieu I de $[BC]$ puis le segment $[IC]$. Un « clic »sur et un champ représentant la longueur IN est créé à l'écran (on peut le renommer grâce à).

On constate bien que cette longueur reste constante pendant toute l'animation (fig8 et fig9).

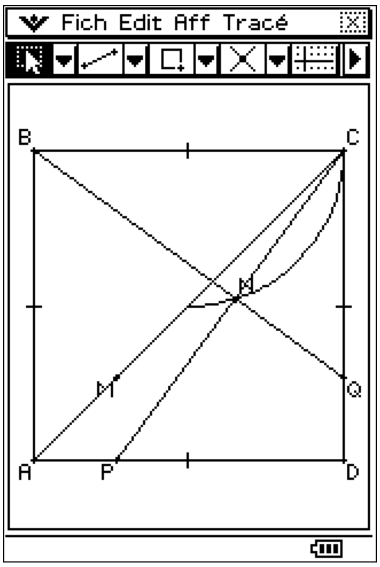

fig7 : le lieu de N

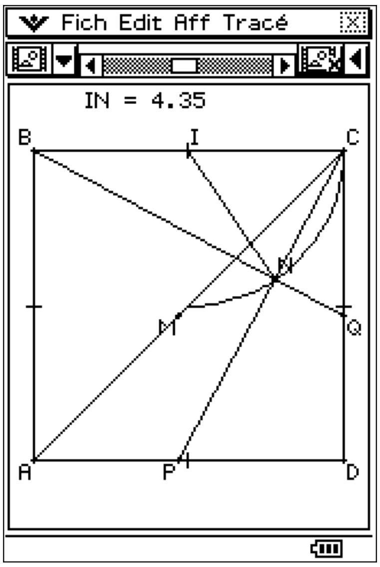

fig8 : une étape

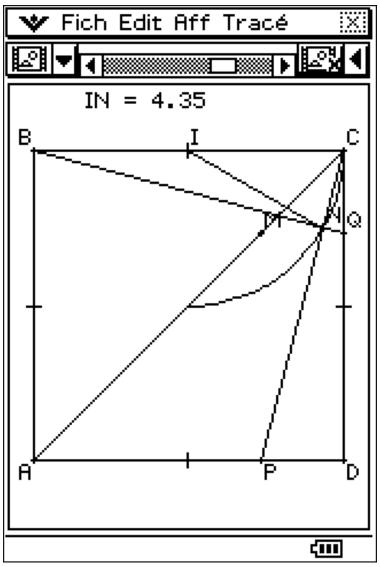

fig9 : une autre

II. Les démonstrations

– *L'orthogonalité des droites* (CP) *et* (BQ)

Il y a plusieurs méthodes.

◇ Commençons par utiliser un repère orthonormé.
Si on se place dans un repère orthonormé $(A, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ avec $\overrightarrow{\imath} = \dfrac{\overrightarrow{AD}}{AD}$ et $\overrightarrow{\jmath} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB}$.

Alors (en notant a la longueur de l'arête du carré) les coordonnées sont :

$M(t,t)$ (avec $0 \leqslant t \leqslant a$), $C(a,a)$, $P(t,0)$, $B(0,a)$ et $Q(a,t)$.

Ainsi $\overrightarrow{CP} = (t-a)\overrightarrow{\imath} - a\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{BQ} = a\overrightarrow{\imath} + (t-a)\overrightarrow{\jmath}$.

On en déduit $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BQ} = (t-a)a - a(t-a) = 0$ donc (CP) et (BQ) sont orthogonales.

◇ On peut utiliser l'outil « produits scalaires ».

On a $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ}$ et $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DP}$.

Ainsi $\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP} = \underbrace{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}}_{=0} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{CD} + \underbrace{\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{DP}}_{=0}$

Or $\begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DP} = -BC \times DP & \text{(vecteurs colinéaires de sens contraires)} \\ \overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{CD} = CQ \times CD & \text{(vecteurs colinéaires de même sens)} \end{cases}$

On a $BC = CD$ et $CQ = DP$ donc $\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP} = -BC \times DP + CQ \times CD = 0$.

Il en résulte que les droites (CP) et (BQ) sont orthogonales.

◇ On peut également utiliser une transformation (c'est le mieux ici).

Soit en effet r la rotation de centre Ω qui envoie A sur D.

L'angle de r est $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (ou $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$) modulo 2π, selon l'orientation de $ABCD$.

On a $r(C) = B$ et $r(P) = Q$. L'image de la droite (CP) est donc la droite (BQ).

Ainsi $\widehat{(CP),(BQ)} = \theta\ [\pi] = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$: les droites (CP) et (BQ) sont orthogonales.

– *Le lieu du point* N

Les vecteurs $\overrightarrow{CN}$ et $\overrightarrow{BN}$, portés par les droites (CP) et (BQ), sont orthogonaux.
Il en résulte que N est *toujours* sur le cercle de diamètre $[BC]$.

Quand M décrit $[AC]$, le point Q décrit $[DC]$. La mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BQ}, \overrightarrow{BC}})$ décrit donc continûment l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Mais $(\widehat{\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IC}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BC}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{BQ}, \overrightarrow{BC}})$.

La mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IC}})$ décrit donc continûment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Il en résulte que le point N décrit exactement un quart de cercle (de centre I et délimité par le milieu de $[AC]$ et par le point C).