Thème : Problèmes de constructions
Constructions à l'aide de transformations

Cet énoncé est celui de la deuxième épreuve orale (épreuve sur dossier) du Capes Externe de mathématiques, proposé aux candidat(e)s le 21 Juillet 2005.

Pour consulter les archives de cette épreuve orale, depuis la session 2005, on se reportera au site officiel du jury, à l'adresse http://capes-math.org/

1. L'exercice proposé au candidat

On considère trois cercles concentriques Γ_1, Γ_2 et Γ_3 de centre O et de rayons respectifs 6 unités, 4 unités et 3 unités et un point A du cercle Γ_1.

Le but de l'exercice est de construire un triangle ABC équilatéral tel que le point B appartienne au cercle Γ_2 et que le point C appartienne au cercle Γ_3.

1. Déterminer et construire toutes les solutions.
   (*on pourra utiliser des rotations de centre* A)

2. Reprendre la question précédente en conservant les rayons des cercles Γ_1 et Γ_3 et en considérant un cercle Γ_2 de rayon r (r réel strictement positif quelconque).
   Discuter alors, en fonction de r, l'existence et le nombre des solutions.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :

1. Expliciter la démarche générale de résolution d'un tel problème.
2. Présenter la construction des points B et C sur un transparent ou à l'aide du modèle de géométrie de la calculatrice.
3. Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.
4. Proposer un ou plusieurs exercices sur le même thème en variant le type de problème de construction et les transformations utilisées.

Proposition de corrigé avec le Classpad 300

L'exercice proposé au candidat

1. On ouvre l'application Géométrie du Classpad, et on fait place nette avec « `Fich/Nouveau` ».

   On trace un premier cercle de centre quelconque : on sélectionne l'icône (ou le menu « `Tracé/Cercle` ») puis on pose le stylet sur le centre puis un point de la circonférence.

   Ces deux points, automatiquement notés A et B, seront renommés ultérieurement.

   On trace ensuite deux cercles de même centre que le précédent (fig1).

   On va maintenant fixer les rayons de ces trois cercles. On sélectionne par exemple le plus grand, et on passe dans la deuxième barre d'icônes (utiliser) pour afficher le champ donnant le rayon actuel du cercle.

   Dans la ligne de saisie de ce rayon, on entre la valeur 6, puis on coche la case (qui devient , indiquant que le rayon est maintenant fixé et égal à 6).

   On procède de même avec les deux autres cercles en imposant les rayons 4 et 3 (fig2).

   On renomme alors les points en conformité avec l'énoncé (A devient O, D devient A), on cache B et C, et on effectue un « zoom box » pour bien centrer la figure (fig3).

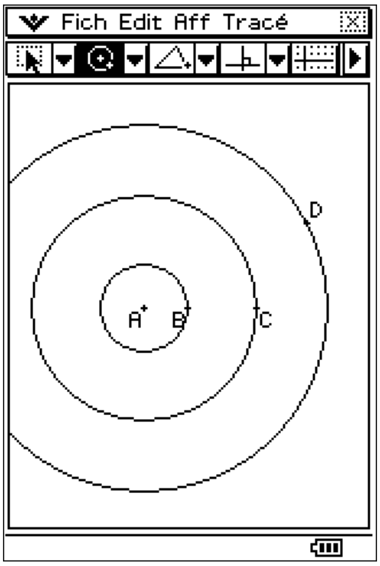

fig1 : 3 cercles de centre A

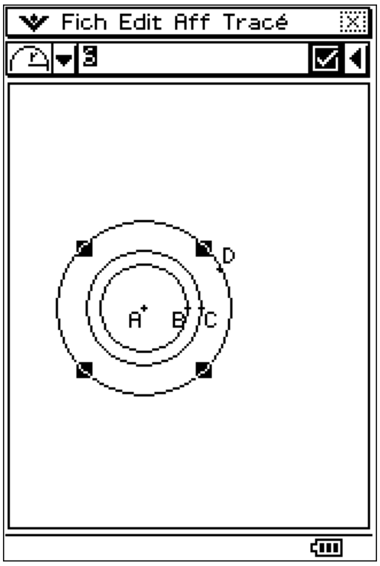

fig2 : les rayons fixés

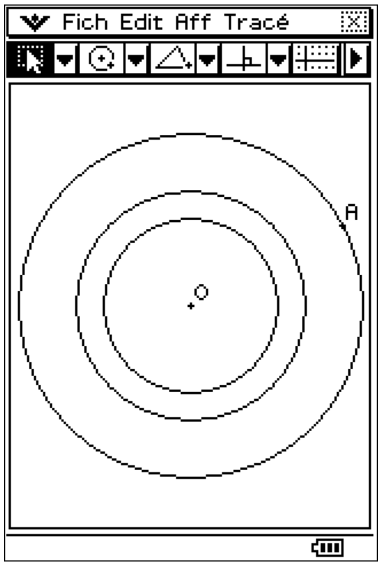

fig3 : la figure demandée

   Supposons qu'il existe une solution (B, C) au problème (c'est la phase d'*analyse*).

   Alors C est l'image de B dans la rotation f de centre A et d'angle $\theta = \pi/3$ (si ABC est direct) ou d'angle $\theta = -\pi/3$ (si ABC est indirect).

   Puisque B est sur Γ_2, C est à la fois sur Γ_3 et sur l'image de Γ_2 dans la rotation f.

   Mais $f(\Gamma_2)$ est le cercle (Γ'_2) de même rayon 4 que Γ_2, et de centre $O' = f(O)$.

   Inversement (c'est la phase de *synthèse*) nous allons considérer l'image Γ'_2 de Γ_2 par la rotation f. On choisit par exemple l'angle $\theta = \pi/3$.

   Pour construire Γ'_2 avec le Classpad, c'est très simple. On sélectionne Γ_2 (c'est le cercle de rayon 4) puis l'outil « `Tracé/Construire/Rotation` » (ou alors l'icône).

Le Classpad demande alors de marquer le centre de la rotation : on sélectionne A.

Une fenêtre demande enfin l'angle de la rotation : on entre la valeur 60 et on valide.

Le cercle image est alors tracé, de même que son centre O' (fig4).

Puisque AOO' est équilatéral, on a $OO' = AO = 6$. Le point O' est donc sur Γ_1.

On observe que les cercles Γ'_2 et Γ_3 se coupent en deux points. Cela est dû au fait que la distance OO' (égale à 6) est inférieure à la somme $3 + 4$ du rayon de Γ_3 et du rayon de Γ'_2 (lui même égal à celui de Γ_2).

Pour obtenir ces deux points d'intersection avec le Classpad, on sélectionne les cercles Γ_3 et Γ'_2, puis l'icône $\boxed{\times}$ (ou « `Tracé/Construire/Intersection` »).

Le Classpad nomme automatiquement E et F les deux points obtenus (fig5).

Ces deux points sont les images de deux points E' et F' de Γ_2 par la rotation f.

Pour les obtenir, on sélectionne E et F et on leur applique la rotation f^{-1} (de centre A et d'angle $-\theta = -60^\circ$). On voit le résultat (fig6 : pour plus de clarté, on a caché Γ'_2).

Dans ces conditions, les deux triangles $AE'E$ et $AF'F$ sont équilatéraux (et ils répondent aux hypothèses puisque E', F' sont sur Γ_2 et E, F sont sur Γ_3).

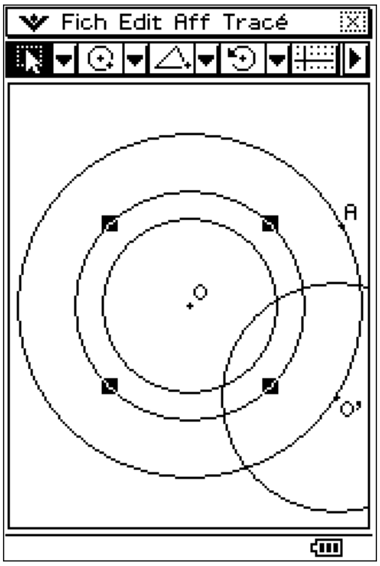

fig4 : le cercle $\Gamma'_2 = f(\Gamma_2)$

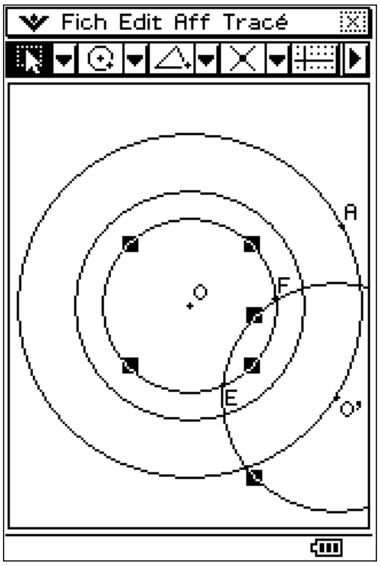

fig5 : les points de $\Gamma'_2 \cap \Gamma_3$

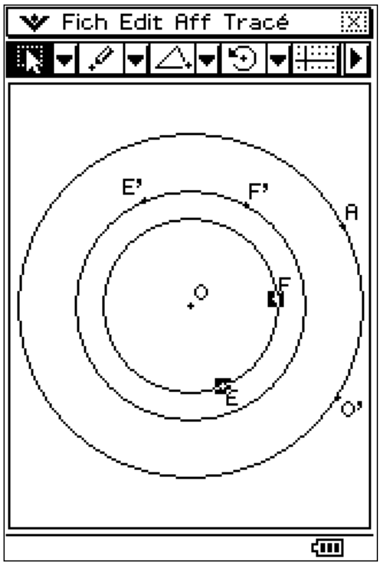

fig6 : les points E', F' sur Γ_2

On trace ces deux triangles, par exemple avec l'outil (fig7).

On obtiendrait de la même manière deux autres triangles équilatéraux (symétriques des deux précédents suivant l'axe OA) à condition de choisir initialement la rotation de centre A et d'angle -60°.

Finalement, le problème proposé admet quatre solutions (mais on n'en trace que deux).

Bien entendu, la figure obtenue ici possède une symétrie de rotation autour de O (car peu importe la position de A sur Γ_1).

Pour le constater, il suffit de créer une animation de A sur Γ_1 : on sélectionne ce point et ce cercle, puis on choisit « `Edit/Animer/Ajouter animation` ». On affiche le menu d'animation par « `Aff/Animation UI` » et on utilise (fig8 et fig9).

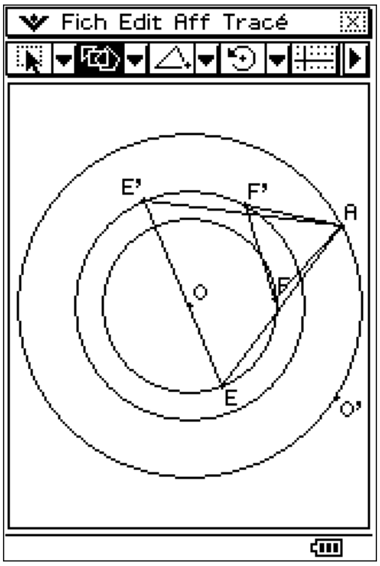

fig7 : triangles $AE'E$, $AF'F$

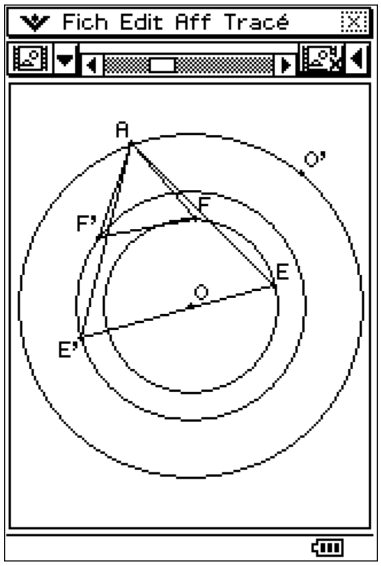

fig8 : invariance par...

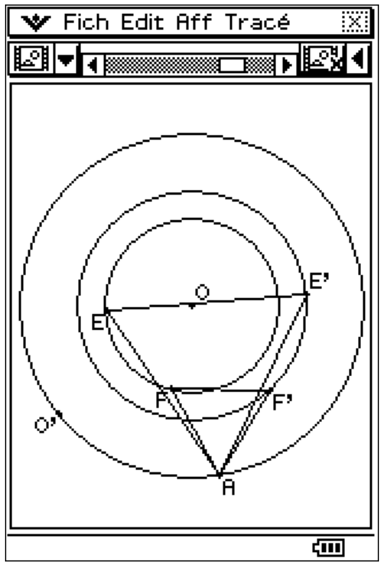

fig9 : ...rotation autour de O

2. On se propose maintenant, tout en conservant les rayons des cercles Γ_1 et Γ_3 (respectivement $r_1 = 6$ et $r_3 = 3$), de modifier le rayon r de Γ_2 (initialement fixé à 4).

   On a bien vu que l'existence de solutions était conditionnée par une intersection non vide du cercle Γ_3 (de centre 0 et de rayon 3) et du cercle Γ_2' image de Γ_2 par la rotation f de centre A et d'angle 60° (ou −60°).

   Le cercle Γ_2' a donc pour rayon r, et il est centré en $O' = f(O)$.

   Mais deux cercles de rayons R et R' et dont les centres sont distants de d se rencontrent si et seulement si $|R - R'| \leqslant d \leqslant R + R'$. Plus précisément :

   – si $d > R + R'$, chacun des deux cerles est extérieur à l'autre.
   – si $d < |R - R'|$ le cercle de plus petit rayon est totalement inclus dans l'autre.

   Dans le cas qui nous occupe :

   – La distance entre les centres O, O' de Γ_3 et Γ_2' est $r_3 = 6$.
   – Le rayon de Γ_3 est $r_3 = 3$ et celui de Γ_2' est r.

   La condition d'existence de solutions est donc $|r - 3| \leqslant 6 \leqslant r + 3$.

   Ces inégalités équivalent à $3 \leqslant r \leqslant 9$.

   Sur le Classpad, il est très facile de modifier la figure pour illustrer la situation quand ces conditions sont (ou ne sont pas) réalisées.

   Pour cela, il suffit de sélectionner Γ_2, de faire apparaître (dans la deuxième barre d'icônes) le champ indiquant que le rayon est pour l'instant fixé à 4, et de modifier cette contrainte (NB : on continue à n'afficher que deux des quatre solutions éventuelles).

   On a ainsi représenté deux des quatre triangles quand $r = 5$, $r = 6$ (c'est-à-dire quand Γ_1 et Γ_2 sont confondus), ou $r = 7$ (fig 10 à 12).

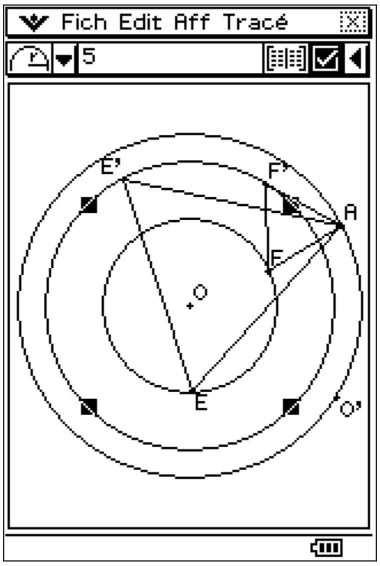

fig10 : avec $r = 5$

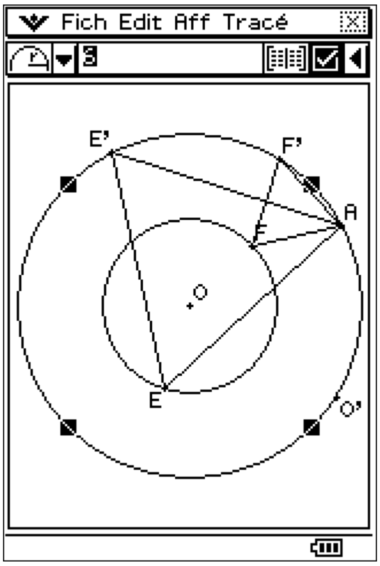

fig11 : avec $r = 6$

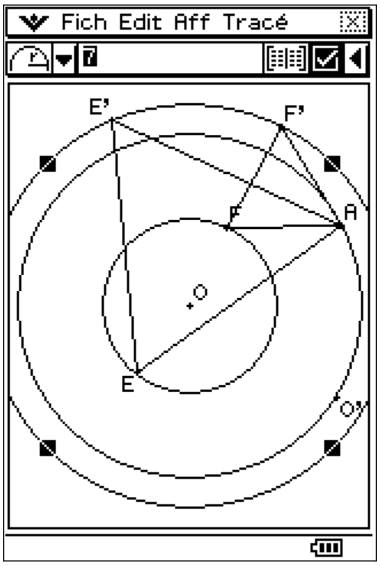

fig12 : avec $r = 7$

Il est intéressant de considérer les cas extrêmes $r = 3$ et $r = 9$.

- Si $r = 3$, le cercle Γ_2 se confond avec Γ_3. Dans ce cas, il n'y a qu'une solution y compris après la symétrie d'axe (OA) (fig13).
- Si $r = 9$, il n'y a qu'une solution (avant la symétrie d'axe (OA), qui en donnerait une deuxième). Ici il a fallu effectuer un « zoom arrière » (fig14).
- On voit enfin que si $r > 9$ (ici on a pris $r = 9,1$) il n'y a plus de solution (fig15).

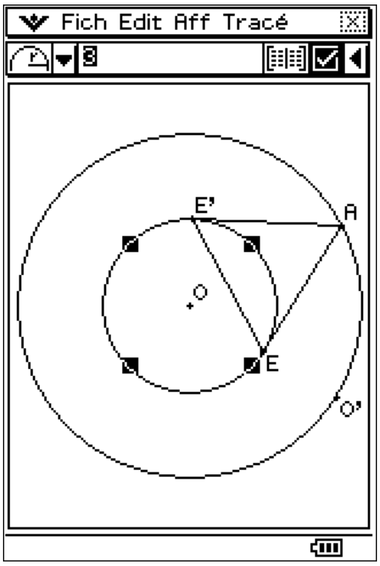

fig13 : avec $r = 3$

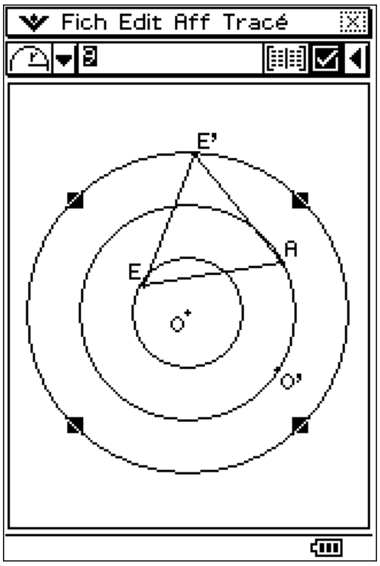

fig14 : avec $r = 9$

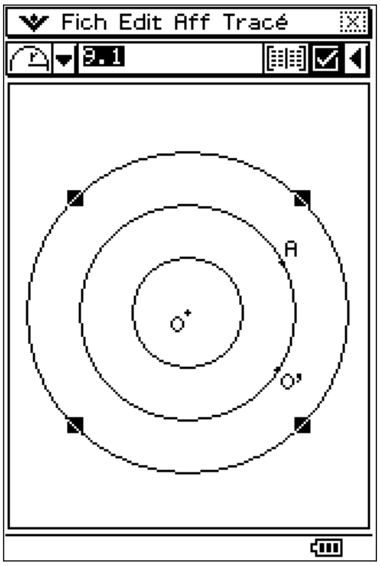

fig15 : avec $r > 9$