

## Thème : Intégration

Cet énoncé est tiré de l'exercice-jury proposé aux candidat(e)s le 26 Juin 2005, lors de la deuxième épreuve orale (épreuve sur dossier) du Capes Externe de mathématiques.

Pour obtenir l'énoncé exact (ainsi que la production demandée au candidat), on se reportera au site officiel du jury, à l'adresse <http://capes-math.org/>

**L'exercice proposé au candidat**

On se propose de calculer, avec les moyens à la disposition d'un élève de Terminale S, la valeur exacte de :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

On pose pour tout réel  $x$  de  $[0, 1]$  :

$$I(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

1. Montrer que la fonction  $x \mapsto I(x)$  est dérivable sur  $[0, 1]$  et calculer sa dérivée  $I'$ .
2. Pour tout  $x$  de  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , on pose :  $F(x) = I(\tan(x))$ .
  - (a) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  et calculer  $F'(x)$ .
  - (b) Montrer que, pour tout  $x$  de  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , on a  $F(x) = x$ .
3. En déduire la valeur de  $I$ .

# Proposition de corrigé avec le Classpad 300

## Corrigé de l'exercice

1. L'application  $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

L'application  $x \mapsto I(x)$  est donc définie sur  $\mathbb{R}$  : plus précisément, elle est la primitive de  $f$  qui s'annule à l'origine.

Elle est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} : I'(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

2. (a) L'application  $F : x \mapsto F(x) = I(\tan x)$  est dérivable sur  $J = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  en tant que composée de fonctions dérivables.

Pour tout  $x$  de  $J$ , on a  $F'(x) = \tan'(x) I'(\tan x) = (1 + \tan^2 x) \frac{1}{1 + \tan^2 x} = 1$ .

(b) D'après ce qui précède, il existe  $x_0$  dans  $\mathbb{R}$  tel que :  $\forall x \in J, F(x) = x - x_0$ .

Or  $F(0) = I(0) = 0$ . Il en résulte  $F(x) = x$  pour tout  $x$  de  $J = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

3. Puisque  $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ , on a  $I = I(1) = F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ . Il en résulte  $I = \frac{\pi}{4}$ .

## Plus loin avec le Classpad 300

Évidemment, le calcul direct de  $I$  ne pose pas le moindre problème au Classpad (fig1).

Comme le demande l'énoncé, on définit la fonction  $I$  (fig2).

On vérifie bien sûr que sa dérivée est l'application  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ , et que  $I(0) = 0$  et  $I(1) = \frac{\pi}{4}$ .

Plus généralement le Classpad connaît l'expression  $I(x) = \tan^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .

Ici  $\tan^{-1}$  est l'application plus connue sous le nom arctan (arc tangente), définie sur  $\mathbb{R}$ , et qui est la bijection réciproque de la restriction à  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  de l'application  $x \mapsto \tan x$ .

On voit (fig3) les courbes  $y = \tan x$  (en pointillés) et  $y = \arctan x$  sur l'intervalle  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ .

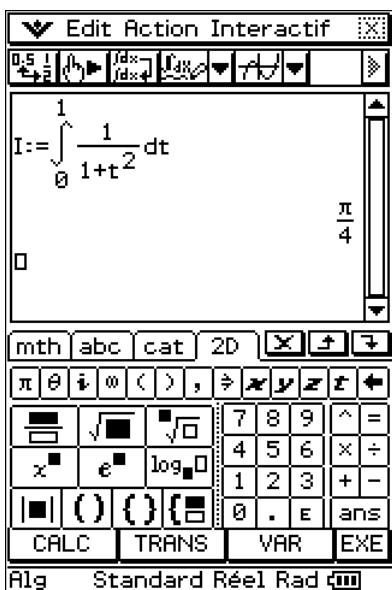


fig1 : le calcul de  $I$

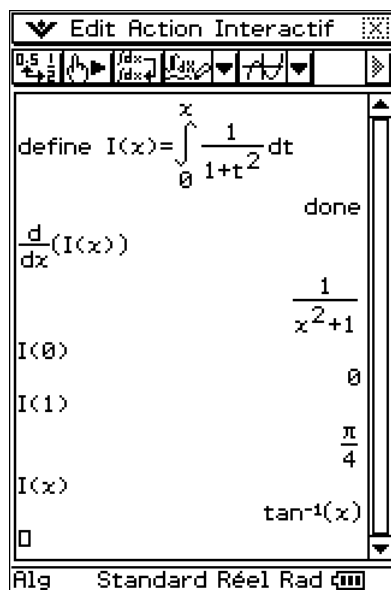


fig2 : la fonction  $I(x)$

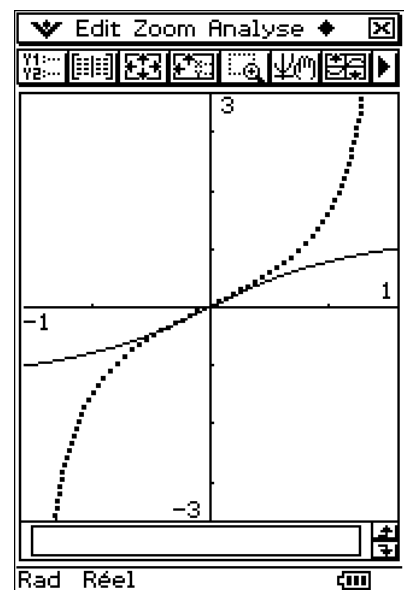


fig3 :  $x \mapsto \tan x, x \mapsto \arctan x$

Comme le demande l'énoncé (question 2), on définit  $F : x \mapsto I(\tan(x))$  (voir fig4).

Compte tenu de ce qui précède, il est normal que le Classpad évalue  $F(x)$  en  $\tan^{-1}(\tan x)$ .

Il est également normal qu'il ne simplifie pas cette expression ! (à suivre)

En revanche le Classpad simplifie automatiquement l'expression  $\tan(I(x))$  en  $x$  (fig4) et là encore, comme on le verra un peu plus loin, c'est normal !

Mais reprenons tout cela, pour y voir un peu plus clair...

L'application  $x \mapsto I(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée  $I'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

L'application  $x \mapsto \tan x$  est définie (et dérivable) pour  $x \neq \frac{\pi}{2} \text{ mod } 2\pi$ , c'est-à-dire sur la réunion  $\mathcal{D}$  des intervalles  $J_k = ]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ , avec  $k$  dans  $\mathbb{Z}$ .

Par composition, l'application  $x \mapsto F(x) = I(\tan x)$  est elle-même définie et dérivable sur  $\mathcal{D}$ .

Pour tout  $x$  de  $\mathcal{D}$ , on a  $F'(x) = \tan'(x) I'(\tan x) = (1 + \tan^2 x) \frac{1}{1 + \tan^2 x} = 1$ .

Sur chaque *intervalle*  $J_k$ , les applications  $x \mapsto F(x)$  et  $x \mapsto x$  ont la même dérivée, donc diffèrent d'une constante  $x_k$  :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \exists x_k \in \mathbb{R}, \forall x \in J_k, F(x) = x - x_k$$

Mais il est clair que  $F(k\pi) = I(\tan k\pi) = I(0) = 0$ . On en déduit  $x_k = k\pi$ .

Conclusion :  $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in J_k = ]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ ,  $F(x) = x - k\pi$ .

En particulier, on retrouve le fait que  $F(x) = x$  pour tout  $x$  de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

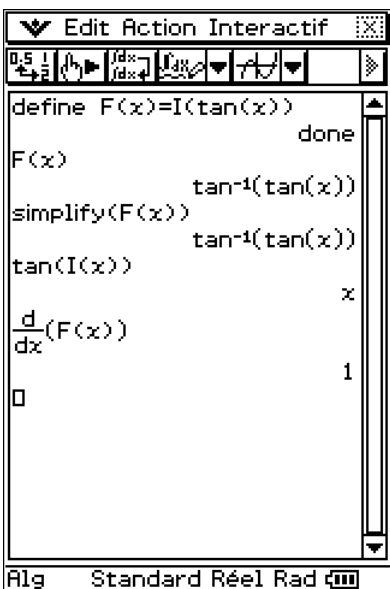


fig4 : la fonction  $F(x)$

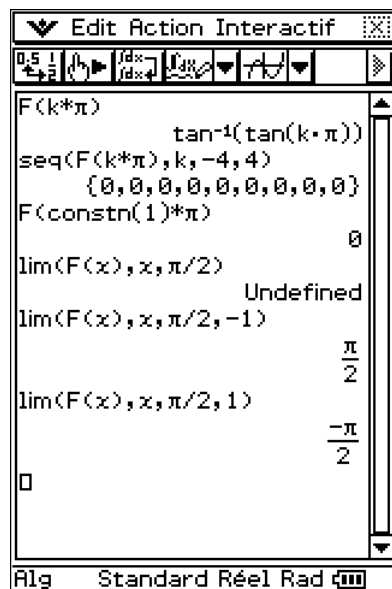


fig5 : propriétés de  $F$

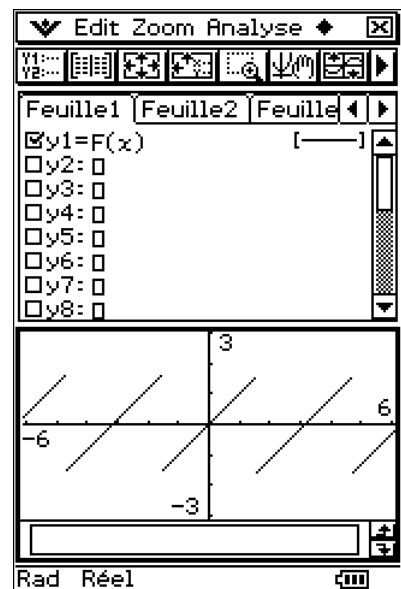


fig6 : tracé de  $F$

Remarque : ce serait une grave erreur de penser que du fait que  $F'(x) = 1$  sur son domaine  $\mathcal{D}$ , alors  $F(x) = x - \lambda$  sur  $\mathcal{D}$  (avec  $\lambda$  un réel fixé). Ce genre de raisonnement n'est en effet valable que sur un **intervalle**, et  $\mathcal{D}$  est une *réunion d'intervalles disjoints*.

On voit (fig5) comment le Classpad permet d'étudier certaines propriétés de  $F$  :

- L'expression  $F(k\pi)$  n'est pas simplifiée car rien ne dit ici que  $k$  soit un entier.
- En revanche, on vérifie que  $F(k\pi) = 0$  pour  $k$  entier dans  $\{-4, \dots, 4\}$  par exemple.
- Pour le Classpad, les expressions  $\text{constn}(m)$  (avec  $m$  entier) désignent des constantes entières arbitraires. C'est pourquoi  $F(\text{constn}(1)\pi)$  est ici simplifié en 0.
- Le calcul de la limite de  $F$  en  $\frac{\pi}{2}$  ne donne rien car cette limite n'est pas définie.
- En revanche, on peut calculer les limites de  $F$  à gauche et à droite en ce point.

On pouvait retrouver l'expression de  $F(x)$  de façon légèrement différente (sans utiliser de dérivation, mais avec un argument de périodicité), à condition de connaître la définition de l'application arctan (arc tangente).

Rappelons en effet que  $x \mapsto I(x)$  (définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ ) est l'application arctan (encore notée  $\tan^{-1}$ ), bijection réciproque de la restriction à  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  de  $x \mapsto \tan x$ .

En particulier :

- Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , on a  $\tan(I(x)) = \tan(\arctan x) = x$ .

Cela explique que le Classpad ait simplifié en  $x$  l'expression  $\tan(I(x))$  (voir fig4).

- Pour tout  $x$  de  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ ,  $F(x) = I(\tan x) = \arctan(\tan x) = x$ .

Mais l'application  $F$  est définie (on l'a vu) sur  $\mathcal{D} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} J_k$  où  $J_k = \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ .

De plus, tout comme l'application  $x \mapsto \tan x$ , elle est  $\pi$ -périodique.

Il en découle immédiatement :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in J_k, F(x) = F(x - k\pi) = x - k\pi \quad (\text{car } -\frac{\pi}{2} < x - k\pi < \frac{\pi}{2}).$$

On voit (fig6) le tracé de la courbe de  $F$  (ici sur  $[-6, 6]$  et dans un repère orthonormé).

On y retrouve bien la périodicité de  $F$ , et le fait que cette application présente une discontinuité en chaque  $x = k\pi$  (avec  $k$  dans  $\mathbb{Z}$ ).

## Une autre intégrale

Dans « le travail demandé au candidat », l'énoncé du 26 Juin 2005, demandait qu'on « propose un ou plusieurs exercices sur le thème de l'intégration ».

Un prolongement intéressant de l'exercice consiste à calculer  $I_2 = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ .

Pour cela, on va voir deux méthodes différentes.

### ◇ Première méthode

Cette méthode prolonge l'exercice du jury.

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , on définit  $I_2(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ .

Pour tout  $x$  de  $J = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ , on pose  $F_2(x) = I_2(\tan x)$ .

Notre problème est donc de calculer  $I_2(1) = F_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .

L'application  $I_2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  on a  $I_2'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ .

L'application  $F_2$  est alors dérivable sur  $J$  et :

$$\forall x \in J, F_2'(x) = \tan'(x)I_2'(\tan x) = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

On sait que  $F_2(0) = I_2(0) = 0$ .

Pour tout  $x$  de  $J$ , on en déduit  $F_2(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (1+\cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left[ t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$ .

On trouve alors  $I_2 = I_2(1) = F_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ .

### ◇ Deuxième méthode

On procède à une intégration par parties dans  $I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$ .

On considère que  $\frac{1}{1+t^2} = u'(t)v(t)$  avec  $u(t) = t$  et  $v(t) = \frac{1}{1+t^2}$ , donc  $v'(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}$ .

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \left[ u(t)v(t) \right]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t) dt = \frac{1}{2} + 2 \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt \\ &= \frac{1}{2} + 2 \int_0^1 \frac{(t^2+1)-1}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{2} + 2(I_1 - I_2) \end{aligned}$$

On retrouve alors  $I_2 = \frac{1}{2} \left( I_1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ .

NB : L'avantage de la première méthode est qu'elle ne nécessite pas de connaître  $I_1 = \frac{\pi}{4}$ .

### ◇ Avec le Classpad 300

On voit (fig7) comment définir la fonction  $x \mapsto I_2(x)$  avec le Classpad :

- Le calcul direct de  $I_2$  ne pose bien sûr aucun problème.
- On obtient l'expression générale de  $I_2(x)$  (où apparaît encore l'application  $\tan^{-1}$ ), ce qui permet en particulier de retrouver la valeur  $I_2(1)$ .

On voit (fig8) comment définir et utiliser la fonction  $x \mapsto F_2(x) = I_2(\tan x)$ .

- On définit la fonction  $F_2$ , puis on calcule sa dérivée.

$$\text{On obtient bien } F_2'(x) = \frac{1}{1+\tan^2 x}.$$

- L'instruction `tcollect` permet de linéariser. Ainsi  $F_2'(x) = \frac{1+\cos 2x}{2}$ .

- On calcule la primitive (s'annulant en 0) de cette expression.

$$\text{On obtient } \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}, \text{ qui est la valeur de } F_2(x) \text{ sur } J = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

- On évalue cette expression en  $x = \frac{\pi}{4}$ .

$$\text{On retrouve bien la valeur de l'intégrale cherchée : } I_2(1) = F_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

Remarque :

L'app<sup>n</sup>  $x \mapsto F_2(x) = I_2(\tan x)$  est définie sur  $\mathcal{D} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} J_k$  avec  $J_k = ]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ .

Tout comme l'application  $x \mapsto \tan x$ , elle est  $\pi$ -périodique.

Or on sait que  $F_2(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$  sur  $J = J_0 = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

Pour tout  $x$  de  $J_k$ , on a donc (en utilisant le fait qu'alors  $x - k\pi$  est dans  $J_0$ ) :

$$F_2(x) = F_2(x - k\pi) = \frac{x - k\pi}{2} + \frac{\sin 2(x - k\pi)}{4} = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} - \frac{k\pi}{2}.$$

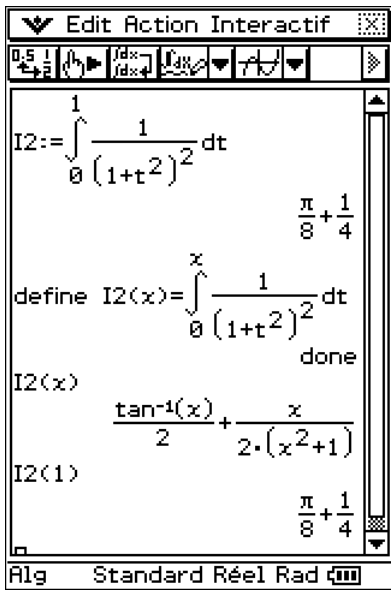


fig7 : la fonction  $I_2(x)$

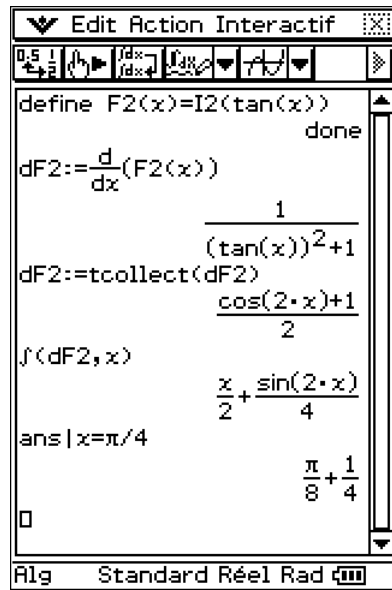


fig8 : la fonction  $F_2(x)$

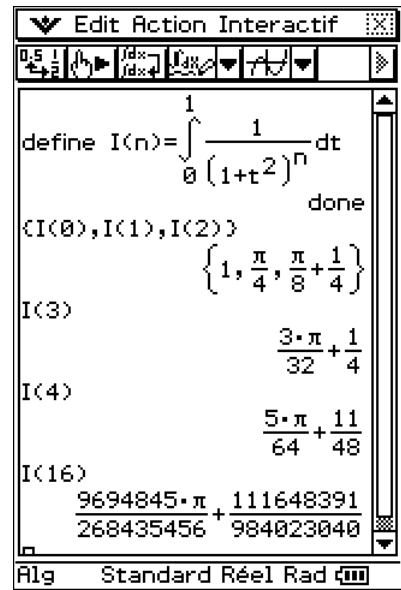


fig9 : les intégrales  $I_n$

### Allons encore plus loin

On pourrait encore généraliser en étudiant les intégrales  $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ , avec  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

On voit (fig9) que le Classpad peut calculer  $I_n$  (c'est plus long si on augmente la valeur de  $n$ ) et on peut conjecturer l'écriture  $I_n = a_n\pi + b_n$ , où  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont deux suites de rationnels.

On peut calculer les  $(I_n)_{n \geq 1}$  à l'aide d'intégrations par parties :

En écrivant  $\frac{1}{(1+t^2)^n} = u'(t)v(t)$  avec  $u(t) = t$  et  $v(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n}$ , donc  $v'(t) = -\frac{2nt}{(1+t^2)^{n+1}}$  :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \left[ u(t)v(t) \right]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t) dt = \frac{1}{2^n} + 2n \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{1}{2^n} + 2n \int_0^1 \frac{(t^2+1) - 1}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \frac{1}{2^n} + 2n(I_n - I_{n+1}) \end{aligned}$$

Il en résulte  $I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}$  pour tout  $n \geq 1$ .

Sachant que  $I_1 = \frac{\pi}{4}$ , cette égalité permet de calculer les  $I_n$  de proche en proche.

Une programme très simple (fig10) permet de calculer les intégrales  $I_n$ .

On voit (fig11 et fig12) comment retrouver (plus vite que par le calcul direct) la valeur de  $I_{16}$ .

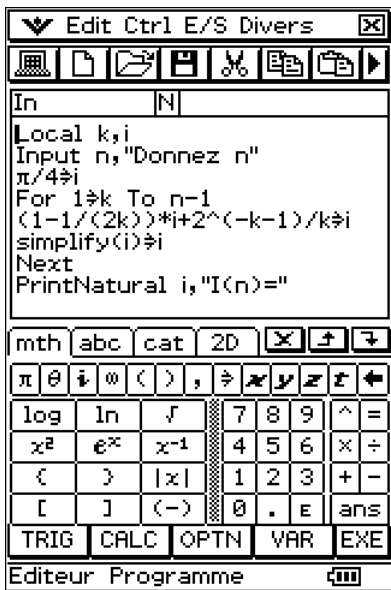


fig10 : le programme In

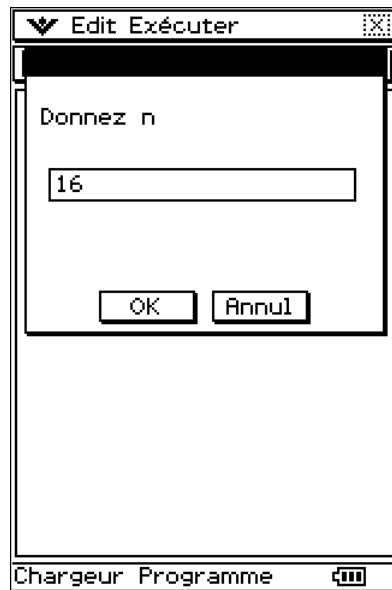


fig11 : lancer In avec  $n = 16$

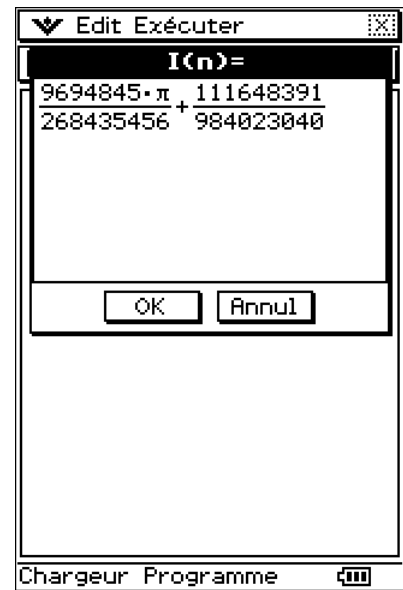


fig12 : l'intégrale  $I_{16}$

Si on s'intéresse plus particulièrement aux coefficients  $a_n$  et  $b_n$  dans l'expression de  $I_n$ , on peut modifier le programme de la façon indiquée (fig13) (il s'appelle maintenant  $J_n$ ), la seule contrainte étant que la variable  $\theta x$  n'ait pas de contenu dans le répertoire en cours.

On voit (fig14) un exemple d'utilisation de  $J_n$  avec  $n = 20$ .

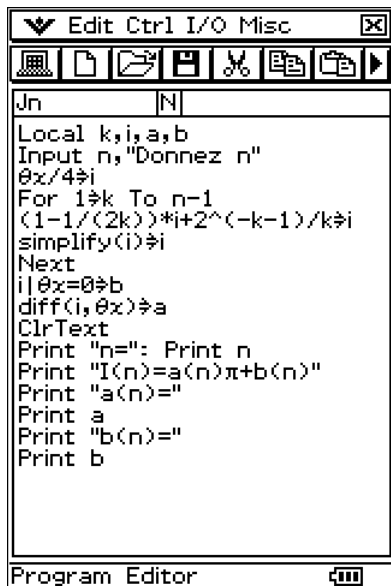


fig13 : le programme Jn

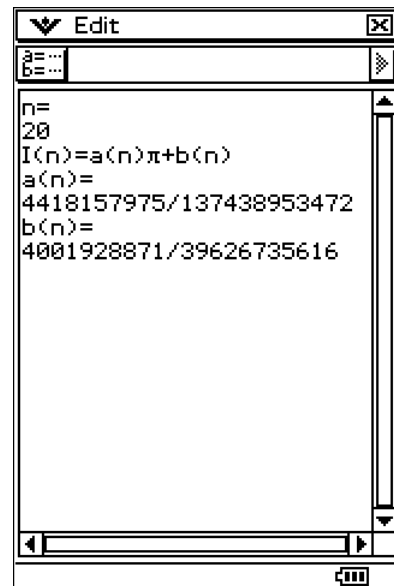


fig14 : résultat si  $n = 20$