Thème : Outils
Les nombres complexes

Cet énoncé est tiré de l'exercice-jury proposé aux candidat(e)s le 29 Juin 2005, lors de la deuxième épreuve orale (épreuve sur dossier) du Capes Externe de mathématiques.

Pour obtenir l'énoncé exact (ainsi que la production demandée au candidat), on se reportera au site officiel du jury, à l'adresse http://capes-math.org/

L'exercice proposé au candidat

On se donne trois points non alignés A, B, C du plan, et le triangle T de sommets A, B, C.

On se propose ici de démontrer *uniquement à l'aide des nombres complexes* la propriété géométrique classique suivante :

Les hauteurs de T sont concourantes en un point H, appelé *orthocentre* de T.

1. Montrer qu'on peut munir le plan d'un repère orthonormé tel que les affixes respectives a, b, c des points A, B, C soient de module 1. On suppose qu'il en est ainsi dans la suite de l'exercice.

2. On définit le point H d'affixe $h = a + b + c$. Montrer que les hauteurs du triangle T se coupent au point H (indication : considérer $z = \dfrac{h-c}{b-a}$)
   Montrer que H est aligné avec le centre de gravité de T et le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Proposition de corrigé avec le Classpad 300

I. Corrigé de l'exercice

1. Il suffit de placer l'origine O du repère au centre du cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle ABC, et de choisir le rayon de ce cercle comme unité de longueur.

   Si on munit le plan d'un repère orthonormé d'origine O, et si on identifie un point M de coordonnées (x, y) dans ce repère avec son affixe $m = x + iy$, les affixes a, b, c des points A, B, C sont alors de module 1.

2. Il faut montrer que le point H d'affixe h est sur chacune des hauteurs du triangle.

   Par symétrie du problème, il suffit par exemple de vérifier qu'il est sur celle issue de C.

   Cela revient à prouver que l'angle $\widehat{\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{AB}}$ est droit.

   On sait que cela équivaut à montrer que le quotient $\dfrac{h-c}{b-a}$ est imaginaire pur.

   On trouve, en utilisant $a\overline{a} = b\overline{b} = 1$:

   $$\frac{h-c}{b-a} = \frac{b+a}{b-a} = \frac{(b+a)(\overline{b}-\overline{a})}{|b-a|^2} = \frac{a\overline{b}-b\overline{a}}{|b-a|^2} = \frac{2i\,\mathrm{Im}(a\overline{b})}{|b-a|^2}$$

   Ainsi $\dfrac{h-c}{b-a}$ est imaginaire pur, donc H est sur la hauteur issue de C.

   Finalement H est sur les trois hauteurs : c'est l'orthocentre du triangle ABC.

   On sait que le centre de gravité G de T a pour affixe $g = \dfrac{1}{3}(a+b+c)$ donc $g = \dfrac{h}{3}$.

   Ainsi $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$, ce qui implique que les trois points O (centre du cercle circonscrit), G (centre de gravité) et H (orthocentre) sont alignés.

   Plus précisément, le point H se déduit du point G par l'homothétie de centre O et de rapport 3. La droite contenant O, G, H s'appelle la *droite d'Euler* du triangle T (si T est équilatéral, les trois points O, G, H sont confondus, sinon ils sont distincts).

II. Un peu de géométrie avec le Classpad

Dans le « travail demandé au candidat » en ce jour du 29 juin 2005, il était demandé d'« *illustrer le résultat à l'aide du module de géométrie de la calculatrice* ».

C'est ce que nous allons faire... On ouvre tout d'abord une session de géométrie (icône Géométrie) et on vide l'écran de ce qui s'y trouve éventuellement (`Edit/Tout effacer`).

On a deux solutions : soit construire d'abord le triangle ABC puis les trois points O, G, H (le centre O du cercle circonscrit étant obtenu comme point d'intersection de deux médiatrices), soit construire d'abord un cercle de centre O et y inscrire ensuite un triangle ABC. Nous choisissons la première possibilité.

On construit le triangle ABC en sélectionnant l'outil `Tracé/Forme spéciale/Triangle` (ou plus rapidement icône) puis en touchant l'écran avec le stylet. Un magnifique triangle ABC remplissant tout l'écran apparaît alors (fig1).

On va ensuite construire deux hauteurs, puis leur point d'intersection H.

Pour tracer une hauteur, on sélectionne un sommet, le coté opposé, puis on choisit l'outil `Tracé/Construire/Perpendiculaire` (ou plus rapidement l'icône).

Pour construire le point d'intersection, on sélectionne les deux hauteurs déjà tracées puis l'outil `Tracé/Construire/Intersection` (ou l'icône). Le point obtenu est automatiquement nommé D. Il convient de le renommer en H (pour cela, sélectionner ce point, faire apparaître la deuxième barre d'icônes par un appui sur , sélectionner le champ et valider par EXE).

On peut alors tracer la troisième hauteur et vérifier qu'elle passe bien par le point H (fig2).

Pour ne pas surcharger la figure, nous choisissons de masquer les trois hauteurs (les sélectionner puis choisir l'outil `Edit/Propriétés/Cacher`).

On trace deux médiatrices (sélectionner un coté puis l'outil `Tracé/Construire/Médiatrice` ou l'icône). On crée leur point d'intersection (c'est le centre du cercle circonscrit à ABC) que l'on renomme en O. On vérifie que la troisième médiatrice passe bien par O (fig3).

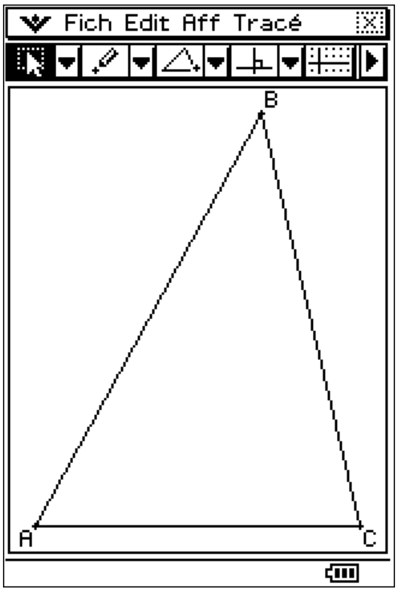

fig1 : le triangle ABC

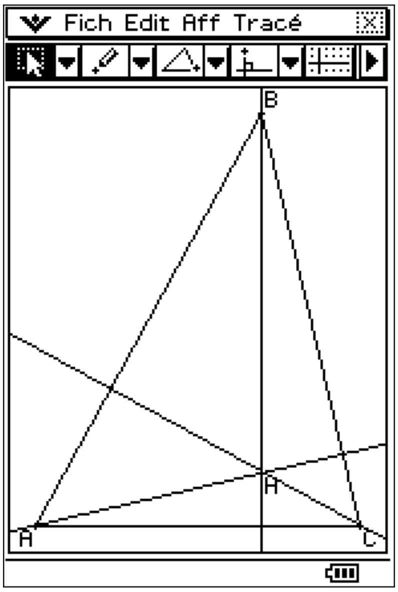

fig2 : l'orthocentre H

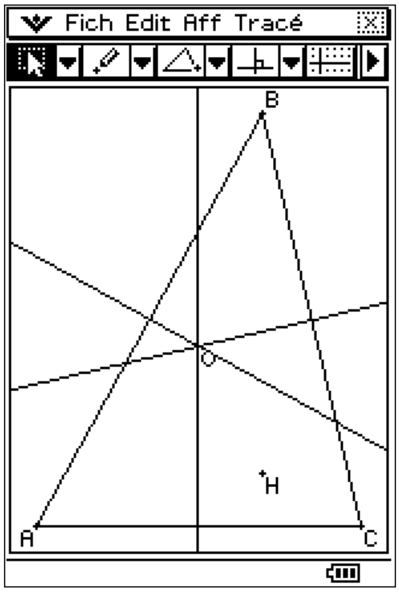

fig3 : le centre O du cercle circonscrit

On choisit de masquer ces trois médiatrices.

On marque ensuite les milieux de deux des trois cotés du triangle (sélectionner un coté puis l'outil `Tracé/Construire/Milieu` ou l'icône) puis les médianes correspondantes (outil `Tracé/Segment de droite` ou icône puis sélection de deux points).
On crée le point d'intersection G de ces deux médianes (c'est le centre de gravité de ABC) puis on vérifie que la troisième médiane passe bien par G (fig4).

On choisit de masquer ces trois médianes.

On trace ensuite la droite qui passe par deux des trois points O, G, H et on vérifie qu'elle passe par le troisième (fig5). On a épaissi les trois points pour les rendre plus visibles (sélectionner un point puis `Edit/Propriétés/Plus épais`).

Dès lors, on peut modifier la position de l'un quelconque des trois points A, B, C et constater que le reste de la figure évolue au gré de ces modifications. En particulier, les points O, G, H restent alignés en permanence (fig6).

On vérifie notamment que le point G reste toujours intérieur au triangle ABC, mais que les deux points O et H lui sont tous deux intérieurs ou tous deux extérieurs, selon que ce triangle est acutangle (trois angles aigus) ou non.

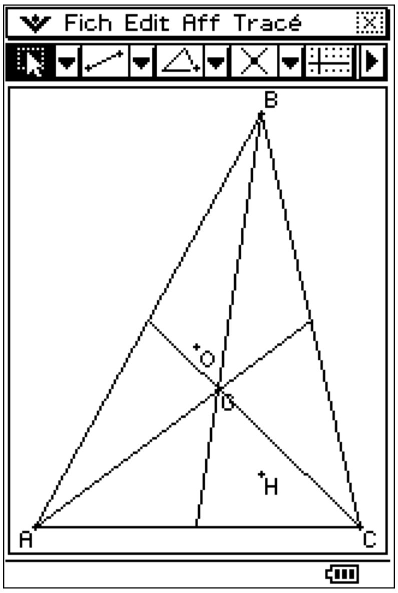

fig4 : le centre de gravité

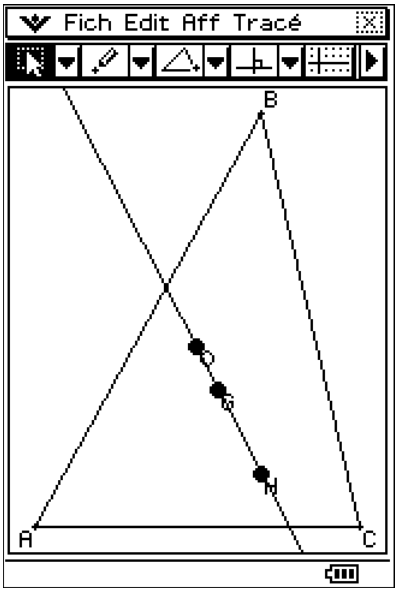

fig5 : la droite d'Euler

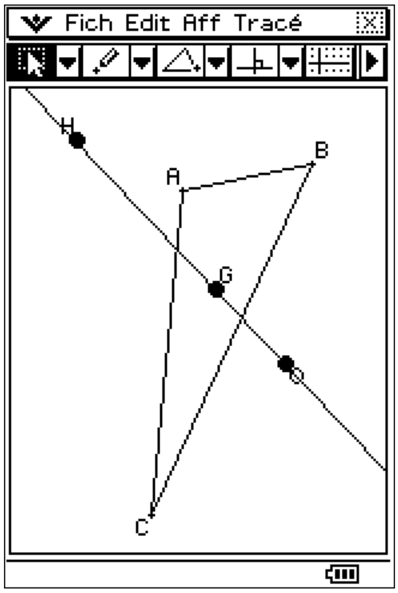

fig6 : O, G, H toujours alignés

III. Plus loin avec le Classpad

Dans le « travail demandé au candidat », il était demandé d'illustrer le résultat (c'est-à-dire l'alignement des trois poins O, G, H) à l'aide du module de géométrie de la calculatrice.

On peut aller un peu plus loin en vérifiant l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ (ou ce qui revient au même, l'égalité $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$) toujours à partir de la figure que nous venons de construire.

Il y a pour cela plusieurs possibilités, parmi lesquelles :

- Construire l'image de O dans l'homothétie de centre G et de rapport -2 et constater que cette image coïncide toujours avec le point H.
- Former les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GO}$ et afficher leurs composantes directement sur la figure. De cette façon, on peut contrôler que l'égalité $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ est vérifiée quelque soient les modifications apportées aux points A, B, C.

◇ Avec une homothétie

Nous avons « désépaissi » les trois points A, B, C, et masqué la droite d'Euler du triangle.

On sélectionne le point O, puis l'outil `Tracé/Construire/Dilatation` (ou l'icône).

Le Classpad nous demande alors de sélectionner le centre de l'homothétie (c'est le point G) puis le rapport de celle-ci (on entre -2 dans la boîte de dialogue).

Le Classpad crée alors O', image de O dans l'homothétie de centre G et de rapport -2.

On vérifie que O' reste confondu avec H, quelque soient les modifications sur A, B, C.

◇ Avec utilisation de vecteurs

On choisit l'outil `Tracé/Vecteur` (ou l'icône) puis on sélectionne successivement le point G (comme origine) et le point O (comme extrémité). le Classpad crée alors le vecteur $\overrightarrow{GO}$ auquel il attribue automatiquement un nom (r, ou s, ou t, etc.)

On crée de même le vecteur $\overrightarrow{GH}$ (fig7).

On sélectionne maintenant $\overrightarrow{GO}$ (le moyen le plus simple, pour opérer une sélection dans une figure qui peut parfois être compliquée, consiste à poser le stylet sur une zone vide de l'écran puis à le déplacer continûment jusqu'à ce que l'objet voulu soit sélectionné).

On passe dans la deuxième barre d'icône (utiliser), on vérifie que le champ est sélectionné, et on touche l'icône avec le stylet. Cela a pour effet de placer sur l'écran un champ contenant les composantes du vecteur. Par défaut ce champ est noté `EQ::` mais on peut bien sûr modifier ce nom dans le champ qui est actuellement actif. Nous lui donnons le nom `GO=` et nous déplaçons ce champ (comme n'importe quel objet) dans la fenêtre de tracé.

On procède de même pour créer le champ affichant les composantes de $\overrightarrow{GH}$ (fig8).

Toute modification apportée aux points A, B, C se répercute sur les composantes affichées des vecteurs $\overrightarrow{GO}$ et $\overrightarrow{GH}$. On constate qu'on a toujours $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ (fig9).

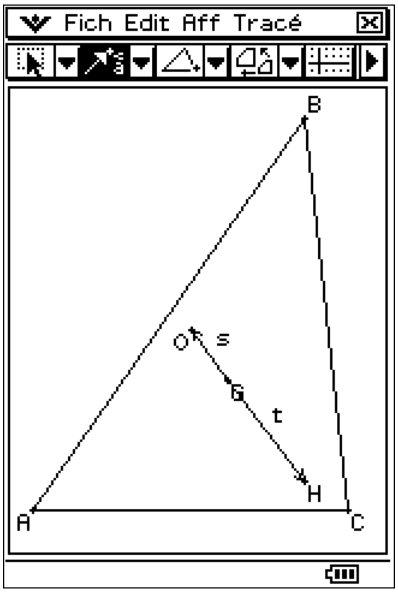

fig7 : $s = \overrightarrow{GO}$ et $t = \overrightarrow{GH}$

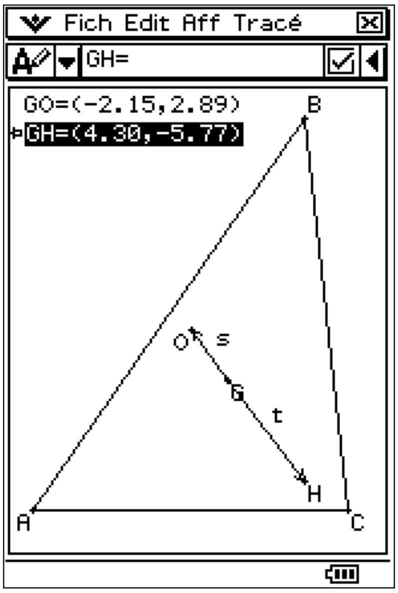

fig8 : leurs composantes

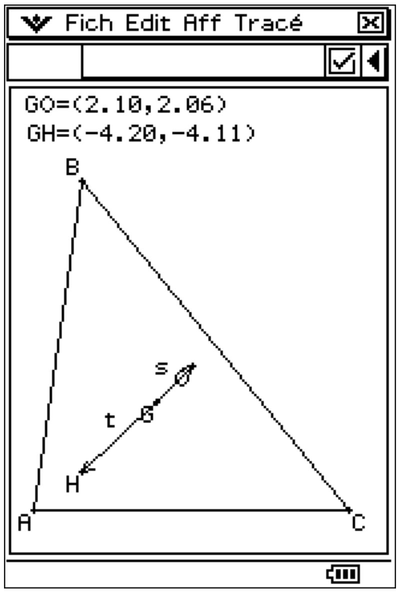

fig9 : toujours $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$

IV. Un prolongement à l'exercice

Dans le « travail demandé au candidat », on trouvait la question suivante :

Quel(s) prolongement(s) pourriez-vous proposer à cet exercice ?

Il y a un prolongement très naturel, qui permet d'illustrer des propriétés classiques de l'orthocentre H d'un triangle ABC, à savoir :

– Les symétriques de H par rapport aux cotés du triangle sont sur le cercle circonscrit.

– Les symétriques de H par rapport aux milieux des cotés sont sur le cercle circonscrit.

Dans l'exercice qui va suivre, on reprend les hypothèses de l'exercice du jury. En particulier, on suppose que le cercle circonscrit au triangle ABC est le cercle de centre O et de rayon 1 (les affixes a, b, c des trois sommets sont donc trois nombres complexes de module 1). Ces hypothèses n'entachent en rien la généralité des propriétés qui sont démontrées ici.

On note encore H, d'affixe $h = a + b + c$, l'orthocentre du triangle ABC.

Voici l'énoncé puis le corrigé de l'exercice que nous proposons comme prolongement de l'exercice posé par le jury.

On constate qu'on reste dans les limites imposées par ce dernier, à savoir démontrer des propriétés géométriques par un usage exclusif des nombres complexes.

◇ Énoncé de l'exercice

1. Identifier, par leur affixe, les symétriques de H par rapport aux milieux des cotés du triangle T et vérifier que ce sont éléments du cercle circonscrit au triangle ABC.
2. Montrer que la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AB) est l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $Z = \sigma(z) = -ab\,\overline{z} + a + b$.
3. Prouver que les symétriques de H par rapport aux cotés du triangle ABC appartiennent eux aussi au cercle circonscrit à ce triangle.

◇ Corrigé de l'exercice

1. Le milieu P du segment $[AB]$ est le point $p = \dfrac{1}{2}(a+b)$.

   Soit H' le symétrique de H par rapport à P.

   Le point H' a donc pour affixe $h' = 2p - h = (a+b) - (a+b+c) = -c$.

   On obtient donc le point du cercle circonscrit, diamétralement opposé à C.

   De même les symétriques de H par rapport aux milieux des segments $[BC]$ et $[AC]$ sont des points du cercle circonscrit (diamétralement opposés respectivement à A et B).

2. La symétrie orthogonale par rapport à la droite (AB) est un antidéplacement du plan.

   Notons $Z = \sigma(z)$ l'affixe de l'image $M'(Z)$ d'un point $M(z)$ par cette symétrie.

   Il existe donc α, β dans $\mathbb{C}$, avec $|\alpha| = 1$, tels que : $\forall\, z \in \mathbb{C},\ \sigma(z) = \alpha\overline{z} + \beta$.

   Or $\begin{cases} \sigma(a) = a \\ \sigma(b) = b \end{cases}$ donc $\begin{cases} \alpha\overline{a} + \beta = a \\ \alpha\overline{b} + \beta = b \end{cases}$ donc $\begin{cases} \alpha + \beta a = a^2 \\ \alpha + \beta b = b^2 \end{cases}$ en utilisant $\overline{a} = \dfrac{1}{a}$ et $\overline{b} = \dfrac{1}{b}$.

   On en déduit $\beta = a + b$ et $\alpha = -ab$.

   La symétrie $M(z) \mapsto M'(Z = \sigma(z))$ est donc définie par : $\forall\, z \in \mathbb{C},\ \sigma(z) = -ab\,\overline{z} + a + b$.

3. Soit $R(r)$ le symétrique de $H(h)$ par rapport à la droite (AB).

   D'après ce qui précède :

   $$\begin{aligned} r &= \sigma(h) = -ab\overline{h} + a + b = -ab(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}) + a + b \\ &= -b\,|a|^2 - a\,|b|^2 - ab\overline{c} + a + b = -b - a - ab\overline{c} + a + b = -ab\overline{c} \end{aligned}$$

   On constate que $|r| = 1$, ce qui prouve que R est un point du cercle circonscrit.

   De la même manière, les symétriques de H par rapport à (BC) et (AC) sont sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

◇ La figure avec le Classpad

On pourrait reprendre la construction telle que (fig2) par exemple, mais nous préférons recommencer la construction, en débutant cette fois par le tracé d'un cercle dans lequel nous allons inscrire le triangle ABC.

Pour créer le cercle circonscrit, on sélectionne l'outil `Tracé/Cercle` (ou l'icône) puis on fixe le centre et un point de la circonférence. Puisque ce point n'est pas utile dans la suite, on choisit de masquer le centre du cercle (`Edit/Propriétés/Caché`).

On crée ensuite deux points supplémentaires sur le cercle (outil `Tracé/Point` ou icône). Pour être certain que les nouveaux points sont bien sur ce cercle, le plus sûr est de poser le stylet sur l'écran et de le déplacer en direction du cercle jusqu'à ce que celui-ci soit sélectionné : le point est alors créé quand le stylet est relevé.

Il est probable qu'on ait besoin de renommer certains points si on veut absolument que les sommets de notre triangle s'appellent A, B, C.

- On construit (on a vu comment faire) l'orthocentre H du triangle ABC, et les milieux I, J, K (sélectionner un coté puis l'outil `Tracé/Construire/Milieu` ou l'icône) des trois cotés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ (fig10).

  On construit les symétriques H_i, H_j et H_k du point H par rapport aux trois points I, J, K (sélectionner le point H, puis l'outil `Tracé/Construire/Dialatation` ou l'icône , puis le centre I ou J ou K de l'homothétie). Ils sont effectivement sur le cercle circonscrit (fig11).
- On construit les symétriques H_{ab}, H_{bc} et H_{ac} de H par rapport aux cotés du triangle (sélectionner le point H, l'outil `Tracé/Construire/Reflexion` ou l'icône , puis l'un des des trois cotés). Les trois points obtenus sont bien sur le cercle circonscrit (fig12).

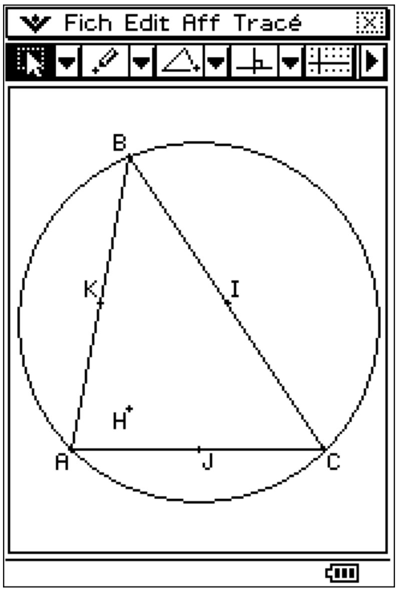

fig10 :

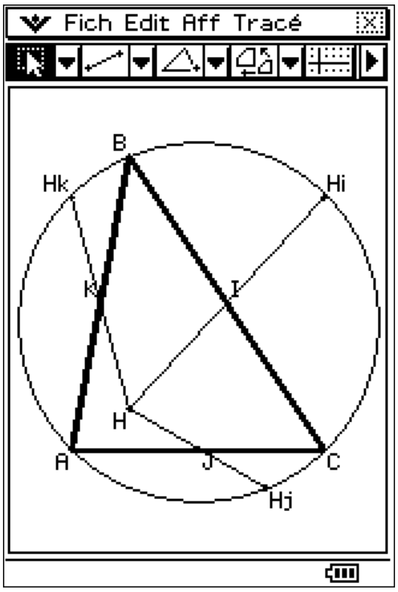

fig11 :

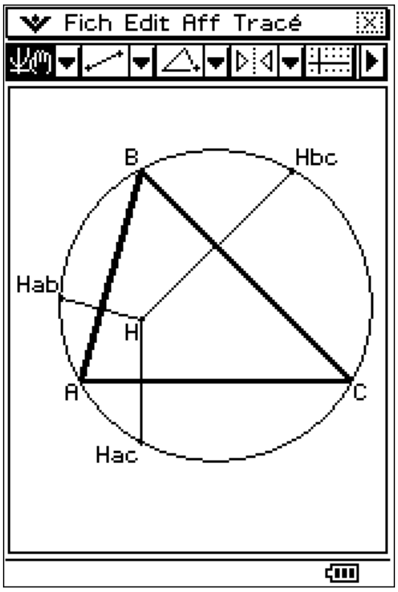

fig12 :