Thème : Arithmétique

Cet énoncé est celui de la deuxième épreuve orale (épreuve sur dossier) du Capes Externe de mathématiques, proposé aux candidat(e)s le 29 Juin 2006.

Pour consulter les archives de cette épreuve orale, depuis la session 2005, on se reportera au site officiel du jury, à l'adresse http://capes-math.org/

1. L'exercice proposé au candidat

1. Soit m un entier relatif. On note (E_m) l'équation $11x + 13y = m$, d'inconnue (x, y). Trouver toutes les solutions (x, y) de (E_m) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
2. On suppose désormais que m est un entier naturel. Montrer qu'il y a autant de solutions (x, y) de l'équation (E_m) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qu'il y a d'entiers dans le segment $\left[\frac{5m}{11}, \frac{6m}{13}\right]$.
3. Montrer que si $m < 143$ (resp. $m \geqslant 143$), alors l'équation (E_m) possède au plus (resp. au moins) une solution (x, y) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes:

Q.1) Dégagez les méthodes et outils nécessaires à la résolution de cet exercice.

Q.2) Écrire un algorithme renvoyant, pour un entier naturel m donné, la ou les solutions éventuelles (x, y) de l'équation (E_m) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Cet algorithme pourra être implanté sur votre calculatrice ou simplement décrit au tableau dans un langage de votre choix.

Q.3) Comment pourrait-on montrer que 119 est le plus grand entier naturel m tel que (E_m) n'ait pas de solution dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Sa réponse à la question Q.2).

– Un ou deux énoncés d'exercices se rapportant au thème « Arithmétique ».

Proposition de corrigé avec le Classpad 300

1. L'exercice proposé au candidat

1. Les entiers 11 et 13 étant premiers entre eux (et même premiers tout court), on sait que l'équation E_1 possède des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

   On remarque la solution particulière $(x, y) = (6, -5)$ car $11 \times 6 - 13 \times 5 = 1$.

   Si on ne *voit* pas immédiatement cette solution, on peut former avec la calculatrice une séquence de multiples de 11 et 13 jusqu'à voir apparaître une différence égale à ± 1.

   Avec le Classpad, on voit par exemple que les couples $(6, -5)$ et $(-7, 6)$ conviennent (fig1).

   On peut aussi appliquer l'algorithme d'Euclide au couple $(13, 11)$ (ça n'est pas long !) :

   $$\begin{cases} 13 = 1 \times 11 + 2 \\ 11 = 5 \times 2 + 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = 11 - 5 \times 2 = 11 - 5 \times (13 - 1 \times 11) = 6 \times 11 - 5 \times 13$$

   Dans ces conditions, le couple $(6m, -5m)$ est une solution particulière de (E_m).

   Soit (x, y) une solution quelconque de E_m dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

   On $\begin{cases} 11x + 13y = m \\ 11(6m) - 13(5m) = m \end{cases}$ donc $(E'_m) : 11(6m - x) = 13(y + 5m)$

   L'entier 11 divise $13(y + 5m)$ et il est premier avec 13 donc il divise $y + 5m$.

   Ainsi, il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $y + 5m = 11k$.

   En reportant dans (E'_m) on trouve $6m - x = 13k$.

   Il existe donc k dans $\mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} x = 6m - 13k \\ y = -5m + 11k \end{cases}$

   Réciproquement un tel couple vérifie $11x + 13y = 11(6m - 13k) + 13(-5m + 11k) = m$.

   Conclusion : les solutions de (E_m) sont les couples $\begin{cases} x = 6m - 13k \\ y = -5m + 11k \end{cases}$, avec k dans $\mathbb{Z}$.

   On voit (fig1) comment vérifier tout cela sur le Classpad.

2. On doit chercher à quelles conditions sur k les entiers $\begin{cases} x = 6m - 13k \\ y = -5m + 11k \end{cases}$ sont dans $\mathbb{N}$.

   On a $\begin{cases} 6m - 13k \geqslant 0 \\ -5m + 11k \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5m}{11} \leqslant k \leqslant \dfrac{6m}{13}$.

   Il y a donc autant de solutions de (E_m) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qu'il y a d'entiers dans $\left[\dfrac{5m}{11}, \dfrac{6m}{13}\right]$.

3. La longueur de l'intervalle $I_m = \left[\dfrac{5m}{11}, \dfrac{6m}{13}\right]$ est $\ell_m = \dfrac{6m}{13} - \dfrac{5m}{11} = \dfrac{m}{143}$.

   – Si $m < 143$, on a $\ell_m < 1$ donc l'intervalle (E_m) ne peut contenir au plus qu'un entier k.
     L'équation (E_m) ne peut donc posséder au plus qu'une solution (x, y) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

   – Si $m \geqslant 143$, on a $\ell_m \geqslant 1$ donc l'intervalle (E_m) contient au moins un entier k.
     L'équation (E_m) possède donc au moins une solution (x, y) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

   On voit (fig2) comment traiter les deux questions précédentes avec le Classpad.

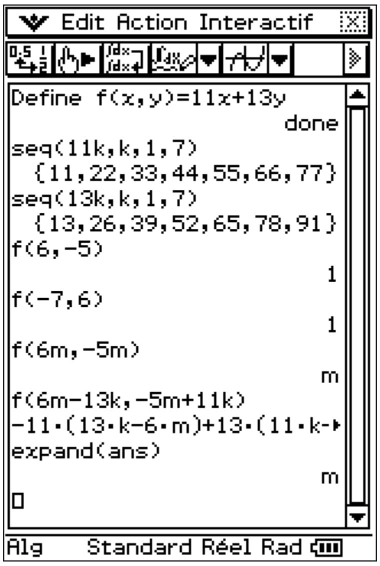

fig1 : résoudre (E_m)

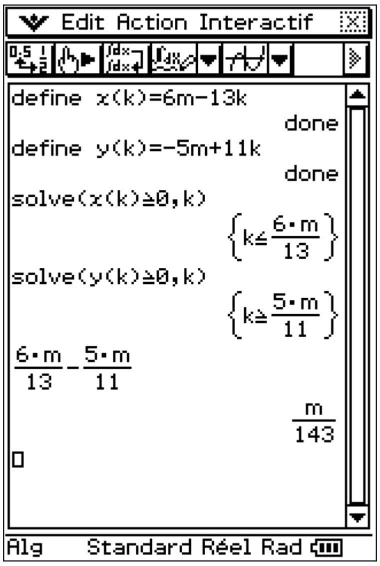

fig2 : solutions positives ?

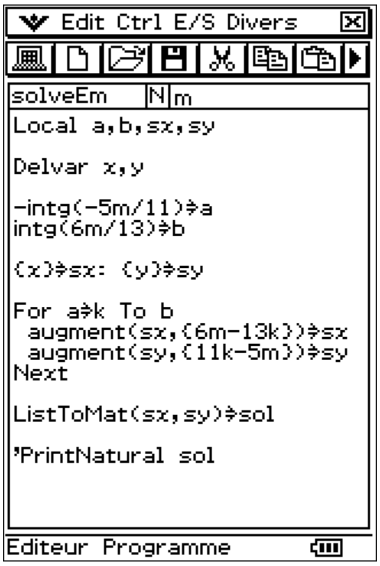

fig3 : programme `solveEm`

Pour la question $(Q.2)$, on peut écrire le programme `solveEm` (fig3).

Le principe est très simple, et utilise la solution connue de (E_m) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

– Posons $x_k = 6m - 13k$ et $y_k = 11k - 5m$.
  On va placer dans un même tableau tous les (x_k, y_k) tel que $x_k \geqslant 0$ et $y_k \geqslant 0$.
– Pour cela, il faut faire varier k dans l'intervalle $I_m = \left[\frac{5m}{11}, \frac{6m}{13}\right]$.
– Notons $[x]$ la partie entière de tout réel x.
  Puisque k est lui-même entier, on a $k \leqslant \frac{6m}{13} \Leftrightarrow k \leqslant \left[\frac{6m}{13}\right]$.
  De même : $k \geqslant \frac{5m}{11} \Leftrightarrow -k \leqslant -\frac{5m}{11} \Leftrightarrow -k \leqslant \left[-\frac{5m}{11}\right] \Leftrightarrow -\left[-\frac{5m}{11}\right] \leqslant k$.
  La fonction `intg` du Classpad calcule la partie entière. Ce qui précède explique les valeurs placées dans les variables locales a et b.
– À la fin, les listes `sx` et `sy` (contenant respectivement les solutions x et y) sont combinées en un seul tableau à deux colonnes, lui-même placé dans la variable globale `sol`.
  L'instruction « `PrintNatural sol` », placée ici en commentaire (penser à enlever le caractère ' pour qu'elle soit évaluée) affiche le contenu de la variable `sol` à la fin du programme `solveEm`.
– Terminons en disant que `solveEm` prend en argument la valeur de l'entier m, et qu'il peut être appelé directement depuis l'application .

On voit (fig3) quelques exemples d'utilisation du programme `solveEm`.

Il devient clair que (E_m) n'admet pas de solution pour $m = 119$ (c'est le sens de l'affichage de `sol` réduit ici à $[x, y]$) et qu'elle en admet une pour $m = 120$ (à savoir $x = y = 5$).

Pour $m = 500$ on trouve les trois solutions $(36, 8)$, $(23, 19)$ et $(10, 30)$ (les solutions sont toujours ordonnées suivant les valeurs croissantes de k, ce qui correspond aux valeurs décroissantes de $x_k = 6m - 13k$ et aux valeurs croissantes de $y_k = 11k - 5m$).

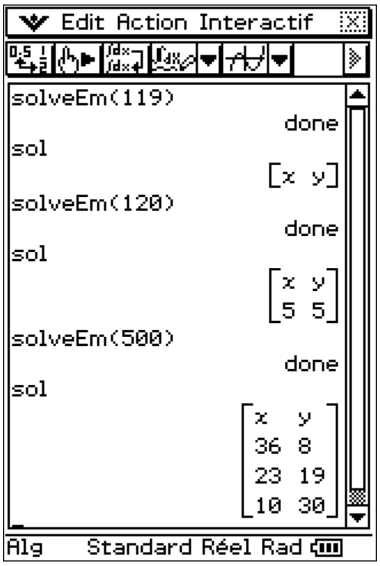

fig4 : $m \in \{119, 120, 500\}$

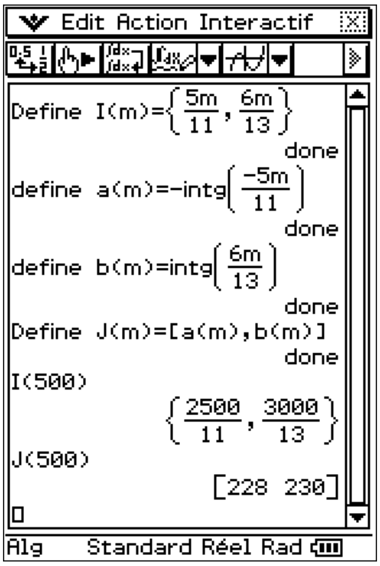

fig5 : intervalles $I(m), J(m)$

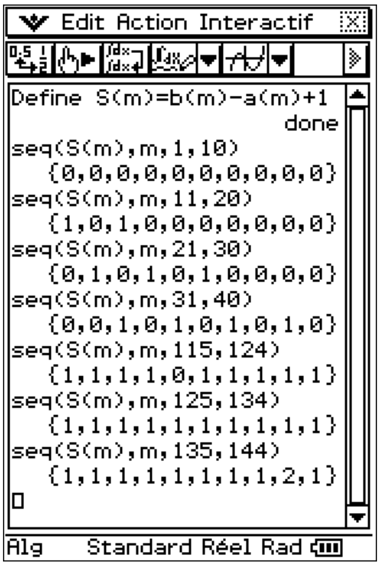

fig6 : la fonction S

Pour répondre à $(Q.3)$: nous avons observé qu'il n'y a pas de solution pour $m = 119$ et qu'il y en a une pour $m = 120$. Cela ne nous assure pas cependant que 119 est le plus grand entier naturel m tel que (E_m) n'ait pas de solution dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Le nombre de solutions de (E_m) dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est le nombre d'entiers dans $I_m = \left[\dfrac{5m}{11}, \dfrac{6m}{13}\right]$.

Comme nous l'avons vu précédemment, c'est le nombre d'entiers de $J_m = [a_m, b_m]$, où on a posé $a_m = -\left[-\dfrac{5m}{11}\right]$ et $b_m = \left[\dfrac{6m}{13}\right]$.

Ce nombre est égal à $S_m = b_m - a_m + 1 = \left[\dfrac{6m}{13}\right] + \left[-\dfrac{5m}{11}\right] + 1$.

On voit (fig5) comment définir les fonctions I, a, b, J.

Pour $m = 500$, on a $I_m = \left[\dfrac{2500}{11}, \dfrac{3000}{13}\right]$, avec $\dfrac{2500}{11} \approx 227,273$ et $\dfrac{3000}{13} \approx 230,769$.

On a ainsi $J_{500} = [228, 230]$: dans cet intervalle, il y a trois entiers, ce qui confirme les trois solutions obtenues pour $m = 500$.

On définit (fig6) la fonction $m \mapsto S(m) = b(m) - a(m) + 1$ donnant le nombre de solutions de (E_m) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On observe que les plus petites valeurs de m pour lesquelles il y a une solution dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont $m = 11$ (évidemment $x = 1, y = 0$), $m = 13$ $(x = 0, y = 1)$, $m = 22$ $(x = 2, y = 0)$, $m = 24$ $(x = 1, y = 1)$, $m = 26$ $(x = 0, y = 2)$, etc.

On retrouve bien (fig6) qu'il n'y pas de solution pour $m = 119$ (alors qu'on voit qu'il y en a une pour tous les autres entiers de $[115, 124]$!).

On observe qu'il y a au moins une solution (en fait une exactement) pour $120 \leqslant m \leqslant 142$.

Comme on sait qu'il y a toujours au moins une solution si $m \geqslant 143$, cela nous assure que 119 est le plus grand m pour lequel (E_m) n'a pas de solution dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Pour terminer sur une note plus précise concernant le rôle de l'entier 143, on constate (fig6) que $m = 143$ est la plus petite valeur de m pour laquelle il y a *deux* solutions distinctes dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ces deux solutions sont $(x = 13, y = 0)$ et $(x = 0, y = 11)$.

II. Une généralisation de l'exercice

L'énoncé suivant généralise l'exercice proposé au candidat le 29 juin 2006.

Si ce qui suit dépasse l'esprit de « oral 2 », ça n'en reste pas moins utile au candidat au Capes.

Énoncé de l'exercice :

On se donne deux entiers a et b, strictement positifs et premiers entre eux.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation $ax + by = n$ d'inconnue le couple d'entiers (x, y).
On note (x_0, y_0) deux entiers relatifs tels que $ax_0 + by_0 = 1$.
On note $\mathscr{S}_n$ (resp. $\mathscr{S}_n^+$) l'ensemble des solutions (x, y) de (E_n) dans $\mathbb{Z}^2$ (resp. $\mathbb{N}^2$).

1. Décrire les éléments de $\mathscr{S}_n$ en fonction notamment de (x_0, y_0) et de n.
2. Montrer que $\mathscr{S}_n^+$ est un ensemble fini. On note σ_n son cardinal.
   Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle $\sigma_n \geqslant 1$?
3. Montrer que σ_n est égal au nombre d'entiers relatifs k tels que $-\dfrac{nx_0}{b} \leqslant k \leqslant \dfrac{ny_0}{a}$.
   En déduire que ($n < ab \Rightarrow \sigma_n \leqslant 1$) et que ($n \geqslant ab \Rightarrow \sigma_n \geqslant 1$).
4. Dans cette question, on suppose $\mathscr{S}_n^+ = \emptyset$, c'est-à-dire $\sigma_n = 0$.
   Montrer qu'on peut écrire $\begin{cases} -nx_0 = qb + r \\ ny_0 = qa + s \end{cases}$ où q, r, s sont entiers tels que $\begin{cases} 1 \leqslant r < b \\ 1 \leqslant s < a \end{cases}$
   En déduire $n \leqslant ab - a - b$.
5. Dans cette question, on suppose $n = ab - a - b$, et on va montrer que $\sigma_n = 0$.
   Montrer qu'il existe un entier m tel que $m < -\dfrac{nx_0}{b} < \dfrac{ny_0}{a} < m + 1$ et conclure.
   Concernant $\mathscr{S}_n^+$, résumer les résultats des questions 2 à 5.
6. Application : combien l'équation $11x + 13y = 2008$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?
   Quel est le plus petit entier n tel que $11x + 13y = n$ n'ait aucune solution dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

Corrigé de l'exercice :

1. La solution générale de (E_n) dans $\mathbb{Z}^2$ s'écrit alors $\begin{cases} x = nx_0 + kb \\ y = ny_0 - ka \end{cases}$ avec k dans $\mathbb{Z}$.
2. Si (x, y) est dans $\mathscr{S}_n^+$ alors $ax + by = n$ donc $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{n}{a}$ et $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{n}{b}$, donc $\mathscr{S}_n^+$ est fini.
   Remarquons que $(0, 0)$ n'est jamais dans $\mathscr{S}_n^+$ puisqu'on a supposé $n \geqslant 1$.
   Réciproquement, si $x \geqslant 1$ ou $y \geqslant 1$, alors $ax + by \geqslant \min(a, b)$.
   Le plus petit n tel que $\sigma_n \neq 0$ est $n = \min(a, b)$ (alors $\mathscr{S}_n^+ = \{(1, 0)\}$ ou $\mathscr{S}_n^+ = \{(0, 1)\}$).
3. Dire que (x, y) est dans $\mathscr{S}_n^+$, c'est dire qu'il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} x = nx_0 + kb \geqslant 0 \\ y = ny_0 - ka \geqslant 0 \end{cases}$
   (et il y a autant de couples (x, y) qu'il y a de tels entiers k)
   Or, pour l'entier k, on a $\begin{cases} x = nx_0 + kb \geqslant 0 \\ y = ny_0 - ka \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{nx_0}{b} \leqslant k \leqslant \dfrac{ny_0}{a}$.
   La longueur de l'intervalle $J = \left[-\dfrac{nx_0}{b}, \dfrac{ny_0}{a}\right]$ est $\ell = \dfrac{ny_0}{a} + \dfrac{nx_0}{b} = \dfrac{n(ax_0 + by_0)}{ab} = \dfrac{n}{ab}$.

Remarque : ce calcul nous assure que $\frac{y_0}{a} > -\frac{x_0}{b}$, ce qui était de toutes façons une conséquence de $ax_0 + b_0y = n > 0$.

Si $n \geqslant ab$, alors $\ell \geqslant 1$ donc J contient au moins un entier, donc $\sigma_n \geqslant 1$.

Si $n < ab$, alors $\ell < 1$ donc J contient au plus un entier, donc $\sigma_n \leqslant 1$.

4. Rappelons qu'on a toujours $-\frac{x_0}{b} < \frac{y_0}{a}$.

   Par hypothèse $\sigma_n = 0$, donc l'intervalle $J = \left[-\frac{nx_0}{b}, \frac{ny_0}{a}\right]$ ne contient aucun entier.

   Ainsi $-\frac{nx_0}{b}$ et $\frac{ny_0}{a}$ ont même partie entière q (et ne sont eux-mêmes pas des entiers).

   On peut alors noter $\begin{cases} -nx_0 = qb + r \\ ny_0 = qa + s \end{cases}$ où q, r, s sont entiers tels que $\begin{cases} 1 \leqslant r < b \\ 1 \leqslant s < a \end{cases}$

   Ainsi $n = (ax_0 + by_0)n = a(nx_0) + b(ny_0) = a(-qb - r) + b(qa + s) = bs - ar$.

   Puisque $s \leqslant a - 1$ et $r \geqslant 1$, on en déduit $n \leqslant ab - a - b$.

5. On a (en utilisant $ax_0 + by_0 = 1$) :

$$\begin{aligned} -\frac{nx_0}{b} &= -\frac{(ab-a-b)x_0}{b} = \frac{ax_0}{b} - (a-1)x_0 = \frac{1}{b} - y_0 - (a-1)x_0 \\ \frac{ny_0}{a} &= \frac{(ab-a-b)y_0}{a} = -\frac{by_0}{a} + (b-1)y_0 = -\frac{1}{a} + x_0 + 1 - ax_0 - y_0 \end{aligned}$$

   Ainsi $-\frac{nx_0}{b} = m + \frac{1}{b}$ et $\frac{ny_0}{a} = m + 1 - \frac{1}{a}$, où m avec $m = -y_0 - (a-1)x_0$ (entier).

   On a alors : $m < -\frac{nx_0}{a} < \frac{ny_0}{a} < m + 1$.

   Ainsi l'intervalle $J = \left[-\frac{nx_0}{b}, \frac{ny_0}{a}\right]$ ne contient aucun entier, donc $\sigma_n = 0$.

   En résumé, avec a, b dans $\mathbb{N}^*$ et premiers entre eux :

   – Si $n < ab$, l'équation $ax + by = n$ admet au plus une solution (x, y) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

   – La plus grande valeur de n pour laquelle elle n'en admet pas est $n = ab - a - b$.

6. On note que $11x_0 + 13y_0 = 1$ avec par exemple $x_0 = 6$ et $y_0 = -5$.

   Les solutions de $11x + 13y = 2008$ dans $\mathbb{Z}^2$ sont les $\begin{cases} x = 12048 - 13k \\ y = -10040 + 11k \end{cases}$ (k dans $\mathbb{Z}$).

   On a $\begin{cases} 12048 - 13k \geqslant 0 \\ -12040 + 11k \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{10040}{11} \leqslant k \leqslant \frac{12048}{13}$.

   Comme $\frac{10040}{11} \approx 912.73$ et $\frac{12048}{13} \approx 926.77$ cela équivaut à $913 \leqslant k \leqslant 926$.

   Il y a quatorze valeurs de k possibles, donc quatorze solutions distinctes (x, y) dans $\mathbb{N}^2$.

   Voici d'ailleurs la liste de ces solutions (données par notre programme `solveEm`) :

   $(179, 3)$ $(166, 14)$ $(153, 25)$ $(140, 36)$ $(127, 47)$ $(114, 58)$ $(101, 69)$

   $(88, 80)$ $(75, 91)$ $(62, 102)$ $(49, 113)$ $(36, 124)$ $(23, 135)$ $(10, 146)$

   On applique les résultats précédents avec $a = 11$ et $b = 13$: le plus petit entier n tel que l'équation $11x + 13y = n$ n'ait aucune solution dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est $n = ab - a - b = 129$.