Thème : Fonctions

Cet énoncé est celui de la deuxième épreuve orale (épreuve sur dossier) du Capes Externe de mathématiques, proposé aux candidat(e)s le 30 Juin 2005.

Pour consulter les archives de cette épreuve orale, depuis la session 2005, on se reportera au site officiel du jury, à l'adresse http://capes-math.org/

1. L'exercice proposé au candidat

Soit f la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ est axe de symétrie pour la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$.

   En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$.
4. Représenter la courbe $\mathscr{C}$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :

Q.1) a question 1) de l'exercice précédent peut-elle être abordée en Seconde ? Rédiger un corrigé de la question 1) au niveau d'une classe de $1^{\text{ère}}$ S.

Q.2) Exposer une méthode permettant d'établir que la courbe représentative d'une fonction admet un axe de symétrie ou un centre de symétrie.

Q.3) Proposer une version alternative de l'énoncé permettant d'étudier le comportement asymptotique de la courbe en -1 sans utiliser l'axe de symétrie de la courbe représentative de f.

Q.4) Proposer d'autres exercices portant sur des études de fonctions, mettant en évidence des propriétés de leurs représentations graphiques (non nécessairement parmi les propriétés étudiées ici).

Proposition de corrigé avec le Classpad 300

Corrigé de l'exercice

1. Le discriminant de $P(x) = x^2 + x + 1$ est $\Delta = -3 < 0$, donc P ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   En fait $P(x)$ garde le signe du coefficient de x^2, donc reste strictement positif sur $\mathbb{R}$.
   Remarque : on pouvait bien sûr écrire $P(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.
   L'application f est donc définie sur $\mathbb{R}$, et elle est dérivable comme composée d'applications dérivables (l'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$).
   Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^{3/2}}$ possède le signe de $2x + 1$.
   Ainsi f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.
   Elle présente donc un minimum absolu au point $x = -\dfrac{1}{2}$, avec $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(x) = \sqrt{P(x)}$ avec $P(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.
   Pour tout a de $\mathbb{R}$, on a $P\left(-\dfrac{1}{2}+a\right) = a^2 + \dfrac{3}{4} = P\left(-\dfrac{1}{2}-a\right)$ donc $f\left(-\dfrac{1}{2}+a\right) = f\left(-\dfrac{1}{2}-a\right)$.
   Cette dernière égalité exprime que $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe $x = -\dfrac{1}{2}$.

3. Le calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$ conduit à la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».
   Pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, en utilisant la « quantité conjuguée » :
   $$f(x) - x = \sqrt{x^2+x+1} - x = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}$$
   Sous cette dernière forme, il est clair que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \dfrac{1}{2}$.
   On en déduit que $\mathscr{C}$ admet une asymptote $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$ au voisinage de $+\infty$.
   On note que $f(x) = \sqrt{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}} > \left|x + \dfrac{1}{2}\right|$ donc $f(x) > x + \dfrac{1}{2}$.
   Cela signifie que $\mathscr{C}$ est partout « strictement au-dessus » de l'asymptote $y = x + \dfrac{1}{2}$.

4. On note la présence d'un point à tangente horizontale en $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
   Du fait de la symétrie d'axe $x = -\dfrac{1}{2}$, la courbe $\mathscr{C}$ a une asymptote $\mathscr{D}_2$ quand $x \to -\infty$.
   La droite $\mathscr{D}_2$ est bien sûr symétrique de $\mathscr{D}_1$ par rapport à l'axe $x = -\dfrac{1}{2}$.
   Son équation est $y = -x - \dfrac{1}{2}$ (coeffs directeurs opposés, même ordonnée 0 en $x = -\dfrac{1}{2}$).
   Toujours par symétrie, $\mathscr{C}$ est partout au-dessus de cette asymptote $\mathscr{D}_2$.
   On pouvait trouver cette asymptote sans recours à des considérations de symétrie en prouvant que $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) + x) = -\dfrac{1}{2}$.

Remarque : $\forall \in \mathbb{R}, y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 + x + 1 \\ y \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (E) : \ y^2 - \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4} \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

(E) désigne une hyperbole $\mathscr{H}$ de centre $\Omega\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$, d'asymptotes les droites $y = \pm\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$, d'axe transverse $x = -\dfrac{1}{2}$, de sommets les points $A\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $B\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Bien sûr, $\mathscr{C}$ est l'intersection de $\mathscr{H}$ avec le demi-plan $y \geqslant 0$. Ces considérations (en marge du programme de terminale S, mais légitimes chez un candidat au Capes) permettent de retrouver les propriétés de $\mathscr{C}$ (axe vertical de symétrie, asymptotes obliques).

Le Classpad permet d'illustrer sans difficulté les résultats précédents. On voit par exemple :

– (fig1) : le tracé de $\mathscr{C}$ et de ses deux asymptotes.

– (fig2) : la dérivée de f, son minimum, puis les limites $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x)$.

– (fig3) : $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à $x = -\dfrac{1}{2}$ car l'appl$^{\text{n}}$ $x \mapsto f\left(-\dfrac{1}{2} + x\right)$ est paire.

L'utilisation d'une liste permet de calculer simultanément plusieurs valeurs de f (on peut aussi utiliser une table de valeurs, mais en perdant l'expression exacte des images).

Les calculs suivants (qui n'ont pas leur place devant le jury de l'oral 2, mais qui peuvent aider le candidat dans sa préparation) montrent comment obtenir l'équation $y = ax + b$ de l'asymptote en $+\infty$ (et le placement de $\mathscr{C}$ par rapport à celle-ci) au moyen d'un développement généralisé $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x} + \text{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

– L'expression `(y1(x)/x|x=1/X)|X>0` signifie « évaluer $f(x)$ en posant $x = 1/X$ (pour se ramener en 0) et en supposant que $X > 0$ ».

– Le développement limité suivant donne donc $\dfrac{f(x)}{x} = 1 + \dfrac{X}{2} + \dfrac{3X^2}{8} + \text{o}(X^2)$.

– On en déduit $f(x) = x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8x} + \text{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en revenant à la variable x.

Cela confirme l'existence de l'asymptote $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$ quand $x \to +\infty$.

En outre le placement est donné par le signe de $\dfrac{3}{8x}$, et on voit que $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$ au voisinage de $+\infty$ (en fait, on sait que $\mathscr{C}$ est *toujours* au-dessus de $\mathscr{D}$).

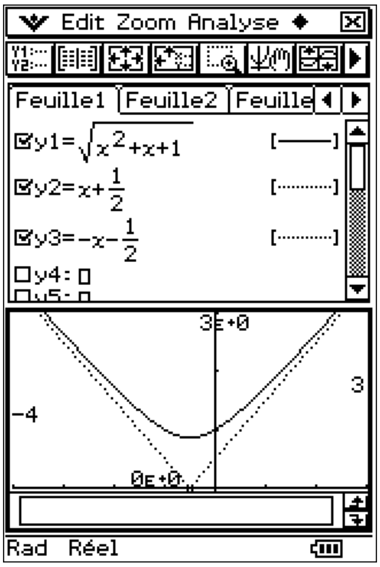


fig1 : $\mathscr{C}$ et ses asymptotes

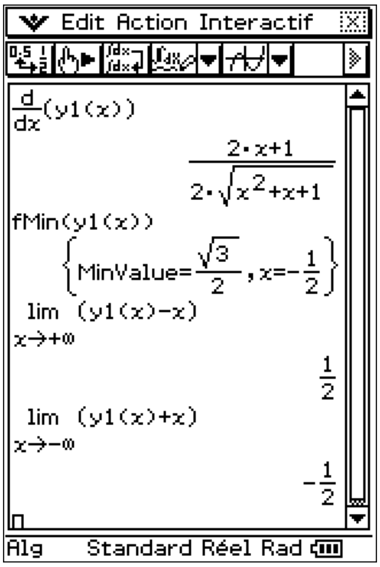


fig2 : dérivée, minimum, limites

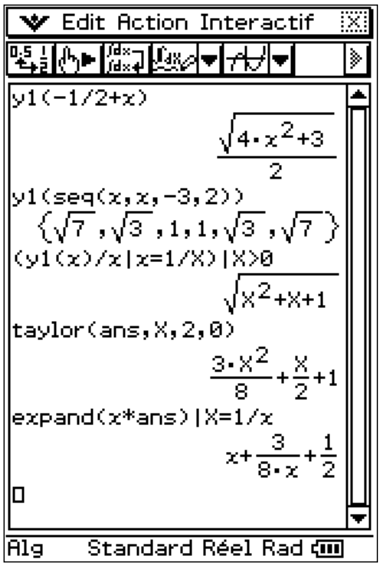
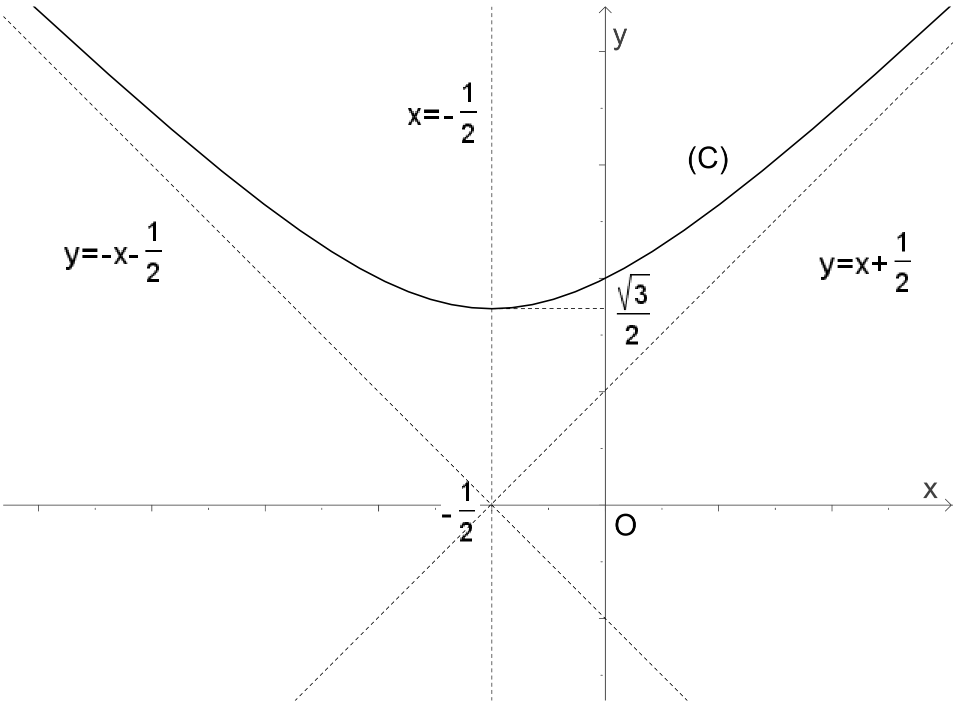


fig3 : calculs divers

Pour terminer, voici le tracé de la courbe représentative $\mathscr{C}$:



Dans la partie « travail demandé au candidat », la première question était de savoir si la question 1) peut être posée en classe de seconde.

La réponse est évidemment négative si on pense utiliser la dérivée, puisque cette notion et le lien avec le sens de variation ne sont abordés qu'en classe de première.

En seconde, et à condition de faire remarquer que $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$, on peut prouver la croissance (resp. la décroissance) de $x\mapsto x^2+x+1$ sur $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ (resp. sur $\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$) par des arguments de composition sur les fonctions $x\mapsto x^2$, $x\mapsto x+a$. Concernant l'application $x\mapsto\sqrt{x}$, ses propriétés doivent être admises en seconde. Les variations de f peuvent donc, tout au plus, faire l'objet d'un devoir donné aux élèves.

Compléments avec le Classpad 300

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

Soit (Γ) la courbe représentative d'une application f (de domaine $\mathscr{D}$). Commençons par quelques rappels sur les axes et centres de symétrie.

– La droite $x=a$ est axe de symétrie de (Γ) si : $x\in\mathscr{D}\ \Rightarrow\Big(2x-a\in\mathscr{D}$ et $f(2x-a)=f(x)\Big)$.

  Cela équivaut à dire : $a+x\in\mathscr{D}\Rightarrow\Big(a-x\in\mathscr{D}$ et $f(a-x)=f(a+x)\Big)$.

  Si on note Ω le point de coordoonnées $(a,0)$, et (X,Y) les coordonnées d'un point quelconque dans $(\Omega,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, les formules de changement de repère sont $\begin{cases}X=x-a\\Y=y\end{cases}$

  L'équation de (Γ) dans le repère $(\Omega,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ est alors $Y=g(X)$, avec $g(X)=f(a+X)$.

  Montrer que la droite $x=a$ est axe de symétrie de (Γ) revient donc à montrer que l'axe des ordonnées (ΩY) est axe de symétrie de (Γ), ce qui revient à prouver que g est paire.

– $\Omega(a,b)$ est centre de symétrie de (Γ) si : $x \in \mathscr{D} \Rightarrow \Big(2x - a \in \mathscr{D}$ et $f(2x-a) = 2b - f(x)\Big)$.

Cela équivaut à dire : $a + x \in \mathscr{D} \Rightarrow \Big(a - x \in \mathscr{D}$ et $f(a-x) = 2b - f(a+x)\Big)$.

Si on note Ω le point de coordoonnées (a,b), et (X,Y) les coordonnées d'un point quelconque dans $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, les formules de changement de repère sont $\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$

L'équation de (Γ) dans $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est alors $Y = g(X)$, où $g(X) = f(a+X) - b$.

Montrer que $\Omega(a,b)$ est axe de symétrie de (Γ) revient donc à montrer que l'origine Ω du nouveau repère est centre de symétrie de (Γ), ce qui revient à prouver que g est impaire.

Le « travail demandé au candidat » consistait notamment à *proposer d'autres exercices portant sur des études de fonctions, mettant en évidence des propriétés de leurs représentations graphiques (non nécessairement parmi les propriétés étudiées ici).*

On peut en particulier étudier des applications dont la représentation graphique présente un *centre* de symétrie. En voici deux exemples.

◇ **Exercice 1**

Montrer que la courbe (Γ) *de* $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3}$ *présente un centre de symétrie* Ω.
Tracer la courbe (Γ).

Solution

Le domaine de définition de f est $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$: il est symétrique par rapport à 0.

Il en découle que si Ω existe, son abscisse est nulle.

Effectivement, pour tout x distinct de $\pm\sqrt{3}$:

$$f(-x) + f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3} + \frac{-x^3 + x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3} = 2$$

Conclusion : le point $\Omega = (0,1)$ est centre de symétrie de (Γ).

Pour le tracé de (Γ), voir plus loin l'étude de f avec le Classpad.

◇ **Exercice 2**

Montrer que la courbe (Γ) *de* $g : x \mapsto \dfrac{x^3 + 2x^2 - 2}{x^2 + 2x + 2}$ *présente un centre de symétrie* Ω.

Solution

Ici le domaine de définition est $\mathbb{R}$ tout entier : il ne nous donne donc pas d'indication, comme c'était le cas dans l'exercice précédent, sur l'abscisse du point d'inflexion.

Néanmoins le dénominateur de $g(x)$ s'écrit $(x+1)^2 + 1$. Le changement de variable $X = x + 1$ conduit donc à un dénominateur pair (comme dans l'exercice 1), et c'est sans doute un signe que l'abscisse du centre de symétrie Ω est $x = -1$.

Plus précisément :

$$g(-1+X) = \frac{(-1+X)^3 + 2(-1+X)^2 - 2}{X^2 + 1} = \frac{X^3 - X^2 - X - 1}{X^2 + 1} = -1 + \frac{X^3 - X}{X^2 + 1}$$

On voit que $g(-1+X)$ s'écrit comme la somme d'une constante et d'une fonction impaire.

Il en découle $g(-1+X) + g(-1-X) = -2$, pour tout réel X.

Cette égalité prouve que le point $\Omega(-1,-1)$ est centre de symétrie de (Γ).

Voici comment on peut utiliser le Classpad pour étudier l'application f de l'exercice 1.

– On voit (fig4) la définition de f, la confirmation que le point $\Omega(0,1)$ est centre de symétrie, le calcul et la factorisation de $f'(x)$, et l'ordonnée en deux extrema.

– On calcule ensuite (fig5) les limites à gauche et à droite en $x = \sqrt{3}$, le coefficient directeur de la tangente en $x = 0$ (par symétrie, il s'agit bien sûr d'une tangente d'inflexion), et une valeur approchée de l'abscisse en laquelle (Γ) coupe l'axe Ox.

  La fonction `parFrac` permet d'écrire $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{x^2-3}$. On en déduit l'existence d'une asymptote oblique (d'équation $y = x+1$) et le placement de (Γ) par rapport à celle-ci (au-dessus quand $x \to +\infty$ et en-dessous quand $x \to -\infty$).

– Ensuite on a tracé simultanément la courbe (Γ) et son asymptote (d'équation $y = x + 1$).

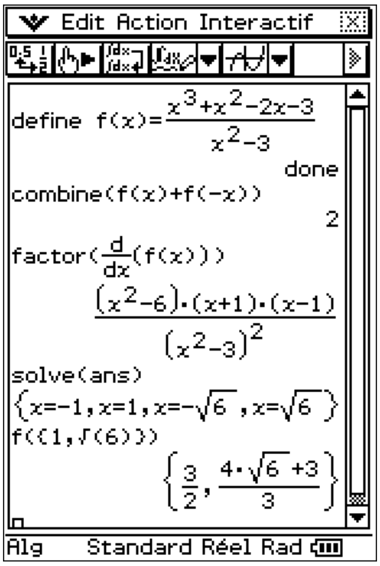


fig4 : symétrie, dérivée

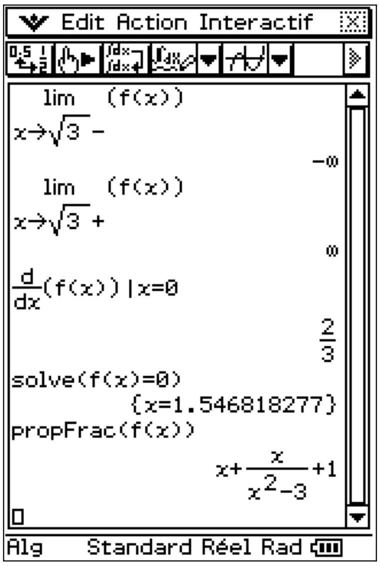


fig5 : limites, $f'(0)$, $f(x) = 0$

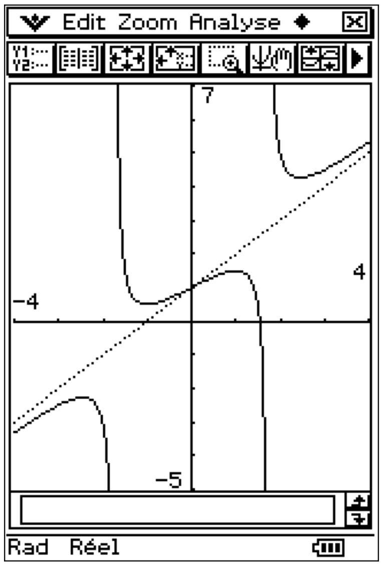


fig6 : tracé de $y = f(x)$

On voit maintenant comment montrer, avec le Classpad, que la courbe représentative de g (dans l'exercice 2) possède un centre de symétrie.

On définit d'abord l'application g, puis l'application h qui à x associe $h(x) = g(a + x) - b$ (il faut à ce stade que les variables a, b soient vides).

On exprime le dénominateur de $h(x)$ et on constate qu'il est pair à condition de poser $a = -1$.

Avec cette valeur de a, on exprime le dénominateur de $h(x)$ et on constate qu'il est impair si on pose $b = -1$.

Dans ces conditions $h(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 1}$.

Le point $\Omega(-1, -1)$ est donc centre de symétrie.

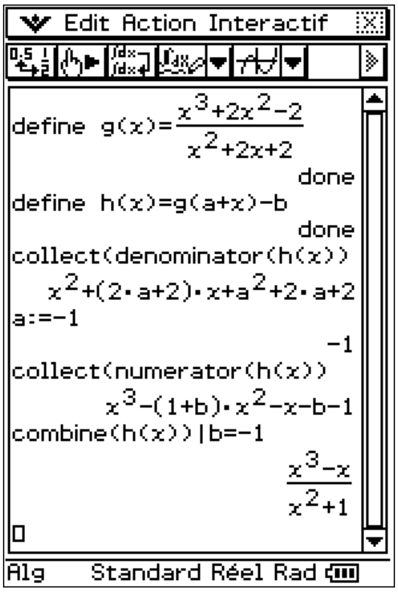


fig7 : centre de symétrie