

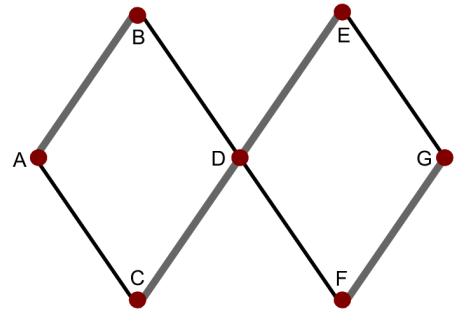
TP 3 : Jouons avec le dessous-de-plat

Un dessous-de-plat est constitué de six barres métalliques rigides, de différentes longueurs, assemblées et articulées entre elles pour former deux losanges de côté 1 (voir la figure ci-contre).

Pour simplifier l'étude, on suppose que les barres sont de largeur nulle.

Les barres sont alors représentées par les segments

$[AB]$, $[AC]$, $[BF]$, $[CE]$, $[EG]$ et $[FG]$.



Le point A est supposé fixe. On déplace le point G le long d'une demi-droite d'extrémité A ; on constate que si le dessous de plat passe de la position de repli complet à l'extension complète, le point G décrit un segment de droite.

1. Préciser la longueur du segment décrit par le point G .
2. Construire une figure représentant ce dessous-de-plat en utilisant un logiciel de géométrie dynamique.
3. Comment se déplacent les points B et C lorsque l'on déforme le dessous-de-plat (passage de la position de repli à l'extension complète) ?

En utilisant le logiciel, faire apparaître l'ensemble de points E décrit par le point E lors de la déformation du dessous-de-plat.

4. On définit désormais le repère orthonormé direct (A, \vec{u}, \vec{v}) , où le vecteur \vec{u} est unitaire et colinéaire au vecteur \overrightarrow{AD} .

On note t l'abscisse du point G (t étant un réel positif).

(a) Dans quel intervalle évolue le réel t lorsque l'on passe de l'extension complète à la position de repli ?

(b) Déterminer les coordonnées du point E en fonction de t .

(c) En utilisant le logiciel, tracer la courbe représentative C de la fonction f définie sur l'intervalle

$$[0;3] \text{ par : } f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$$

(d) Vérifier à l'aide du logiciel que le point E appartient à la courbe C .

(e) Retrouver le résultat précédent par un calcul.

Résolution en utilisant la ClassPad 300 :

Bourgoing Mariane

Lancer l'application « Géométrie » dans le menu du ClassPad 300.

Faire apparaître le repère avec les graduations en appuyant deux fois sur

Régler la fenêtre d'affichage. Appuyer sur puis Fenêtre Aff (choisir par exemple : xmin = -1 ; xmax = 5).

1) Création du dessous de plat :

a- Création des points A, F, B et C :

Le point G décrit le segment $[AF]$ avec $A(0;0)$ et $F(4;0)$.

Appuyer sur puis sur et construire les deux points A et F ; renommer le point de coordonnées $(4;0)$

en appuyant sur puis sur et sélectionner puis taper F). Construire le segment $[AF]$ (appuyer sur

puis). Le sélectionner en positionnant le stylet sur le segment et construire le point G (voir fig. 1).

Les points B et C sont les points d'intersection de la médiatrice Δ de $[AD]$ et du cercle C de centre A et de rayon 1 où D est le milieu de $[AG]$.

Créer le milieu de $[AG]$ (sélectionner les points A et G puis appuyer sur puis sur).

Tracer le cercle C , pour cela créer le point $K(1;0)$ puis le cercle de centre A , passant par K (cliquer sur

puis sur et sélectionner les points A et K ; cf fig. 2).

Pour tracer la médiatrice Δ , sélectionner les points A et D puis dans puis appuyer sur (cf fig.3).

Créer les points d'intersection de Δ et C en sélectionnant Δ et C puis dans puis en appuyant sur , et les renommer B et C (cf fig. 4).

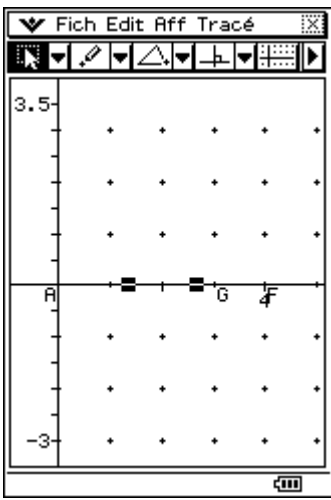


fig. 1

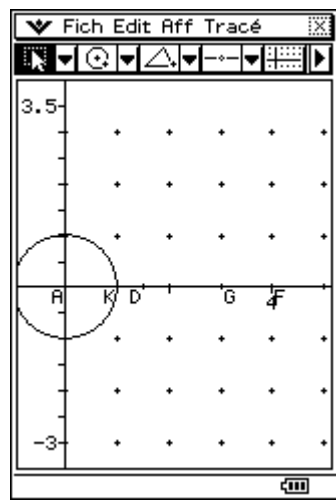


fig. 2

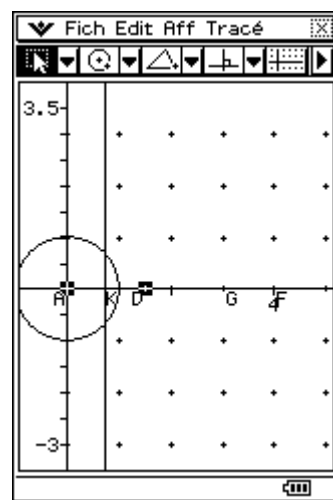


fig. 3

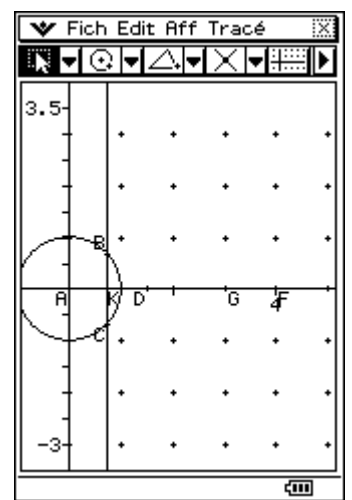


fig. 4

On peut cacher C , Δ et K pour rendre la figure plus claire (sélectionner les objets à cacher, puis aller dans Edit, Propriétés, Caché). Créer ensuite les segments $[AB]$, $[AC]$.

b- Création des points E et F et du dessous de plat :

Les points E et F sont les points d'intersection de la médiatrice Δ' de $[DG]$ et des droites (DE) et (DF) respectivement. Créer la médiatrice Δ' de $[DG]$ comme précédemment, puis la droite (DE) (sélectionner les points D et E puis appuyer sur \square et sur \square), de même créer (DF) (cf. fig. 5). Construire ensuite les points d'intersection E et F (en utilisant \square , après avoir sélectionné les droites). Cacher alors les droites (DE), (DF) et Δ' puis tracer les segments $[BF]$, $[CE]$, $[EG]$ et $[FG]$. Le dessous de plat est terminé (cf fig. 6).

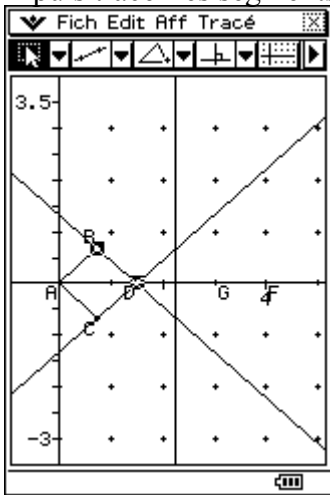


fig. 5

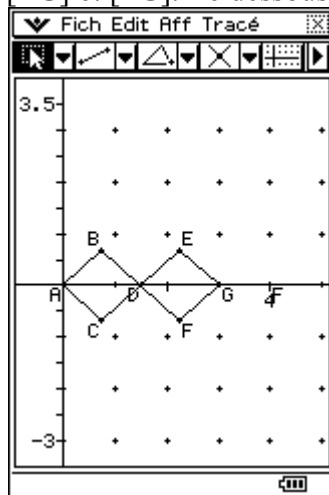


fig. 6

2) Animation du point G sur le segment [AF] :

Pour faire décrire le segment $[AF]$ par le point G, sélectionner le segment $[AF]$ et le point G (cf fig. 7), puis aller dans Edit, Animer puis Ajouter Animation puis retourner dans Edit, Animer et Editer Animations (choisir un pas de 50 et $t_0 = 0,01$). Pour revenir avec la figure en plein écran, cliquer sur la fenêtre graphique puis appuyer sur Resize. Lancer alors l'animation (Edit, Animer et Lancer (une fois); cf fig. 8,9,10).

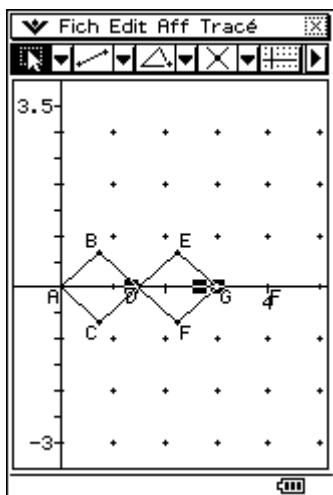


fig. 7

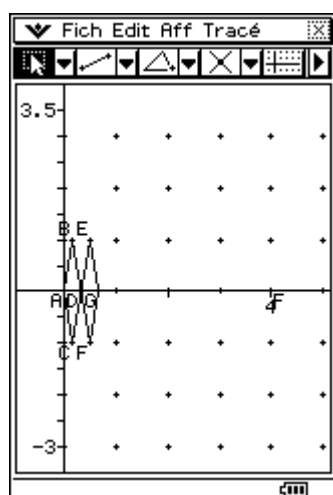


fig. 8

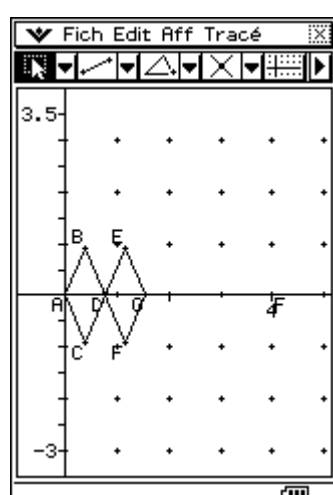


fig. 9

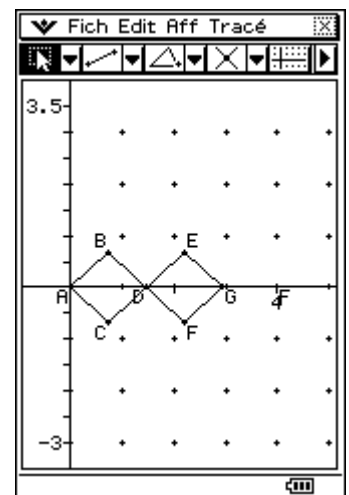
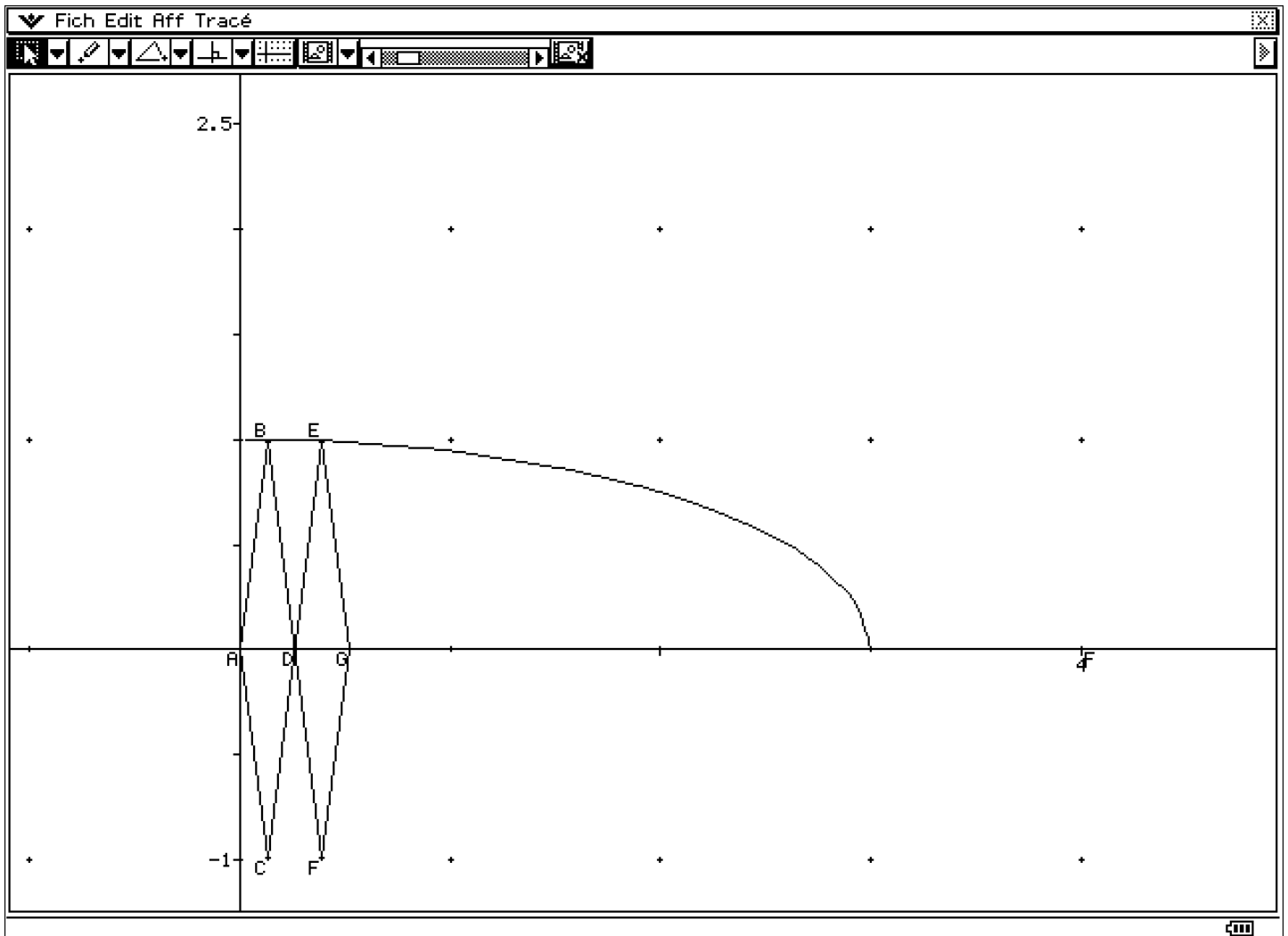


fig. 10

3) Lieux géométriques :

Lorsque G décrit [AF], il est évident que les points B et C décrivent chacun un quart du cercle C. Pour déterminer le lieu décrit par le point E, sélectionner le point E puis dans Edit; Animer et Tracé. Enfin aller dans Edit, Animer et Lancer(une fois). Voici la courbe Γ décrite par E.



4) Détermination d'une équation de Γ :

Dans le repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{4} \vec{AD}$; on note t l'abscisse du point G.

Lorsque G décrit [AF], t décrit le segment [0;4].

Coordonnées de E (en supposant que $y_E > 0$). E appartient à la médiatrice de [GD] avec $G(t; 0); D(\frac{t}{2}; 0)$

donc $x_E = \frac{1}{2}(x_G + x_D) = \frac{3t}{4}$. Et $EG = 1 \Leftrightarrow EG^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{t}{4}\right)^2 + y_E^2 = 1 \Leftrightarrow y_E^2 = 1 - \frac{t^2}{16} \Leftrightarrow y_E = \sqrt{1 - \frac{t^2}{16}}$, car $y_E > 0$.

D'où : $E\left(\frac{3t}{4}; \sqrt{1 - \frac{t^2}{16}}\right)$.

a) Vérification d'une équation de Γ grâce à la calculatrice :

Tracer la courbe d'équation $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ pour $0 \leq x \leq 3$. (Aller dans Tracé, Fonction, f(x), cf fig. 11) et vérifier graphiquement que le point E appartient à cette courbe (cf fig. 11,12,13).

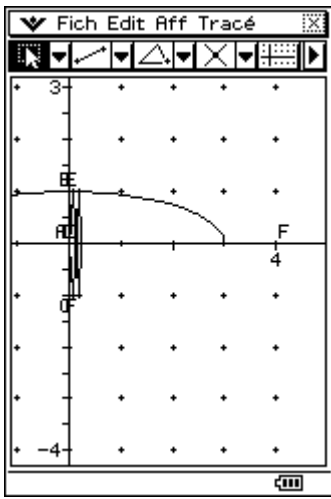


fig. 11

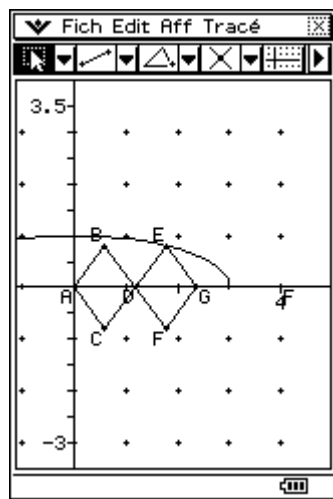


fig. 12

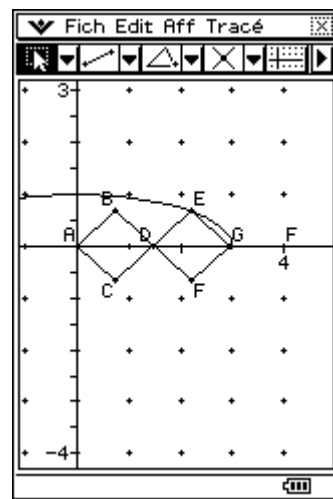


fig. 13

b) Détermination d'une équation de Γ par le calcul :

On a $E\left(\frac{3t}{4}; \sqrt{1-\frac{t^2}{16}}\right)$. Lorsque t décrit $[0; 4]$, x_E décrit le segment $[0; 3]$.

De plus : $x_E = \frac{3t}{4} \Leftrightarrow t = \frac{4x_E}{3} \Rightarrow y_E = \sqrt{1-\frac{x_E^2}{9}}$. Donc le point E décrit bien, lorsque t décrit $[0; 4]$ la courbe Γ

d'équation : $y = \sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$ pour $0 \leq x \leq 3$.

5) Utilisation du tableur :

Pour tracer la courbe Γ , on peut aussi utiliser la fonction Tableur de la calculatrice. Préalablement, aller dans Tableur et effacer toutes les données (Edit, Tout effacer).

Dans le menu Géométrie, sélectionner le point M puis visualiser ses coordonnées (appuyer sur puis si besoin, sur) et appuyer sur la touche . Les coordonnées de M apparaissent alors (cf. fig. 14) (il faut bien sûr avoir précédemment lancé l'animation, le nombre de points étant le pas choisi).

Sélectionner les colonnes x et y et les copier en allant dans Edit puis Copier.

Dans Tableur, recopier ces deux colonnes (Edit, Coller) (cf. fig 15).

Pour tracer la courbe correspondante, sélectionner les colonnes A et B puis aller dans et choisir nuage de points () (cf fig. 16)

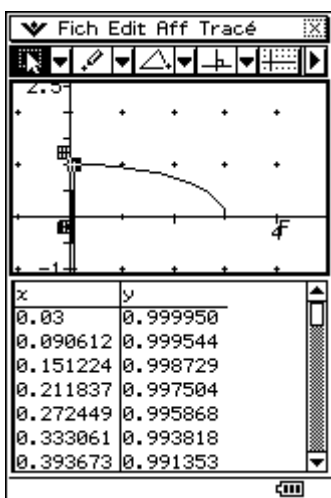


fig. 14

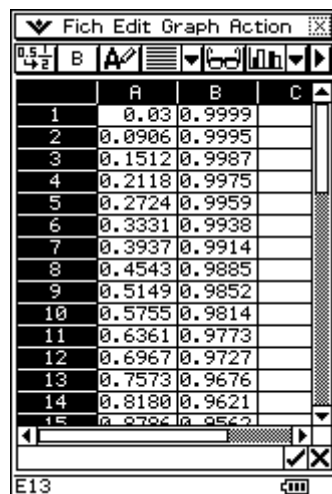


fig. 15

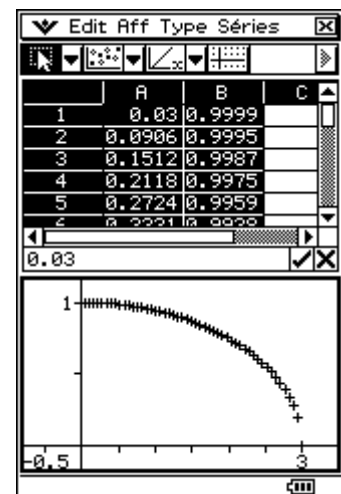


fig. 16

Pour tracer la courbe d'équation $y = \sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$, sélectionner n'importe quelle cellule du tableur, y écrire

l'équation puis sélectionner la cellule; l'équation apparaît alors juste au-dessus du graphique (cf. fig. 17).

Ensuite, sélectionner cette équation et la faire glisser dans la partie graphique.

La courbe est alors tracée (cf. fig 18).

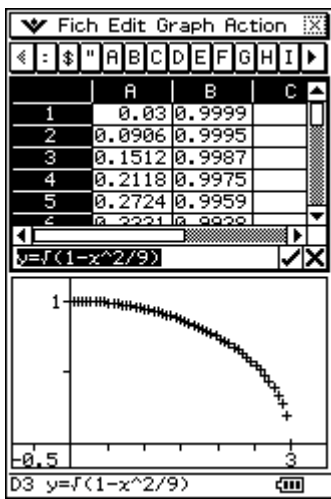


fig. 17

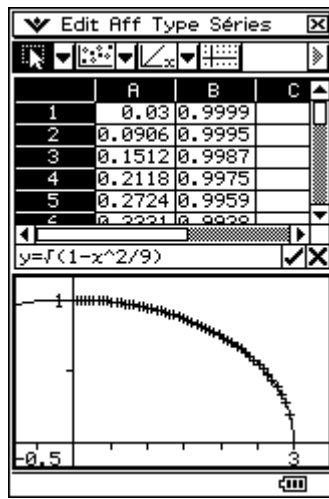


fig. 18

On voit ainsi que la courbe d'équation $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ et le nuage de points coïncident parfaitement.

Remarque : Supposons que l'on ne nous ait pas donné l'équation de la courbe et que l'on n'ait pas réussi à déterminer une équation. L'allure du nuage de points obtenu figure 16 peut faire penser à la courbe d'une fonction $f = \sqrt{u}$ avec u un polynôme de second degré.

Recopier la colonne A dans la colonne C puis dans la colonne D, faire calculer $u(x) = f(x)^2$

Pour cela, dans D1, taper $= B1^2$ puis aller dans Edit, Remplir échelle et compléter la seconde ligne (cf. fig 19). Tracer alors le nuage de points correspondant en sélectionnant les colonnes C et D (cf. fig. 20).

Dans \square_{x^2} appuyer sur \square_{x^2} , une parabole est alors tracée qui approche au mieux le nuage de points (cf. fig. 21).

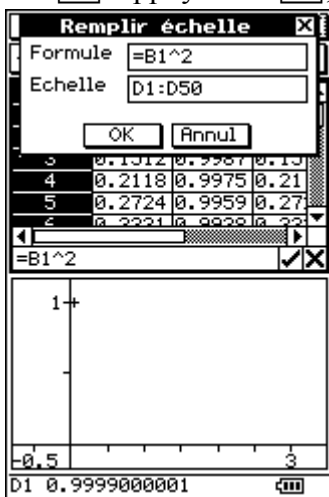


fig. 19

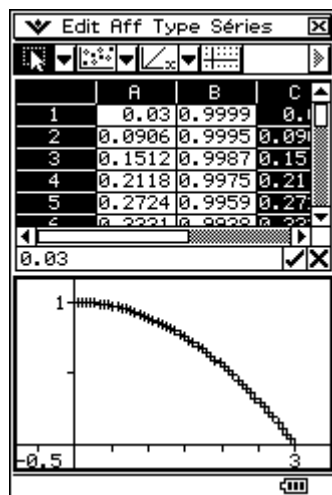


fig. 20

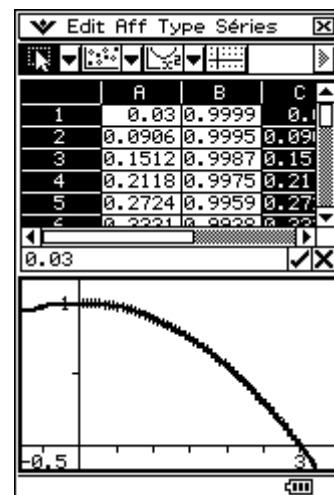


fig. 21

Il suffit alors de cliquer sur cette courbe pour obtenir son équation (cf. figure ci-dessous). Aux erreurs d'approximation près on retrouve bien $u(x) = 1 - \frac{x^2}{9}$ et donc $f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$.

