

# NOMBRE DE SOLUTIONS D'UNE EQUATION

## Enoncé

On donne un réel  $k$ .

On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) :  $-x + 3 = \frac{k}{x}$  pour  $x$  strictement positif.

1. En utilisant un logiciel de construction graphique ou une calculatrice graphique :

a) Conjecturer, suivant les valeurs de  $k$ , le nombre de solutions de l'équation (E).

Appeler l'examineur pour valider la conjecture.

b) Si  $k > 0$ , trouver graphiquement une valeur approchée de  $k$  pour laquelle l'équation (E) a une unique solution.

Appeler l'examineur pour vérifier la valeur trouvée.

2. Démontrer que pour  $k < 0$ , l'équation (E) a une unique solution.

## Production demandée

- Pour la question 1. b), recopier la valeur approchée obtenue pour  $k$  ;
- Réponse écrite pour la question 2.

# CORRECTION

On donne un réel  $k$ .

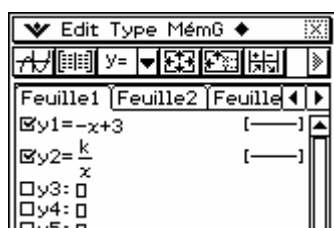
On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) :  $-x + 3 = \frac{k}{x}$  pour  $x$  strictement positif.

1. En utilisant un logiciel de construction graphique ou une calculatrice graphique :

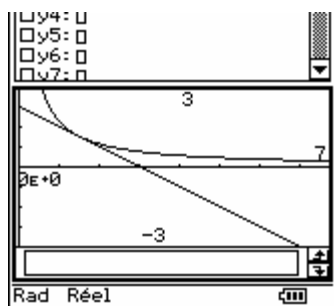
a) Conjecturer, suivant les valeurs de  $k$ , le nombre de solutions de l'équation (E).

Résoudre l'équation (E) cela revient à chercher les points d'intersection entre la courbe représentative de la fonction  $x \mapsto \frac{k}{x}$  et la droite d'équation  $y = -x + 3$ .

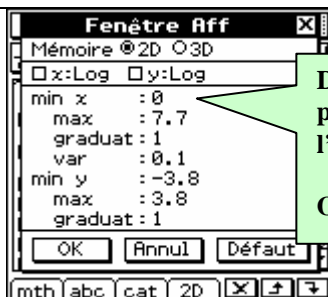
Avec la ClassPad, on entre les 2 fonctions dans le menu *Graph&Table*



Représentation graphique

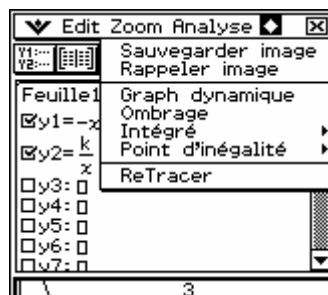


Fenêtre d'affichage pour le graphique

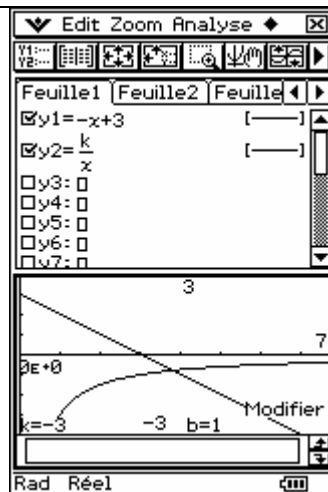


D'après l'énoncé  $x$  est strictement positif :  
l'ensemble de définition est  $]0 ; +\infty[$ .  
On peut prendre  $\min x = 0$

Animons le graphique en utilisant Graph dynamique



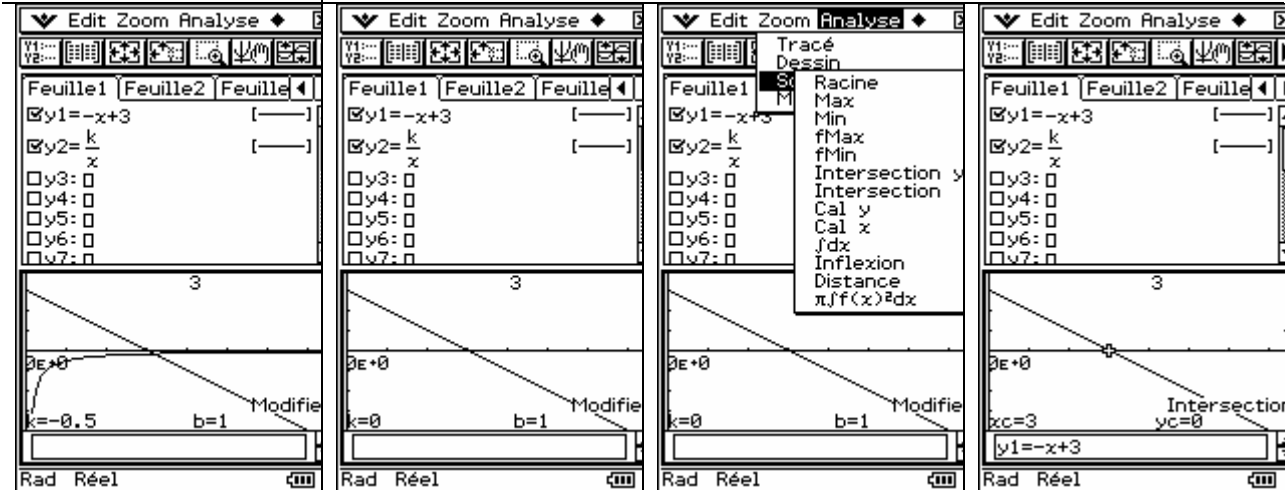
Paramètre  $k$  (pas à 0,1)



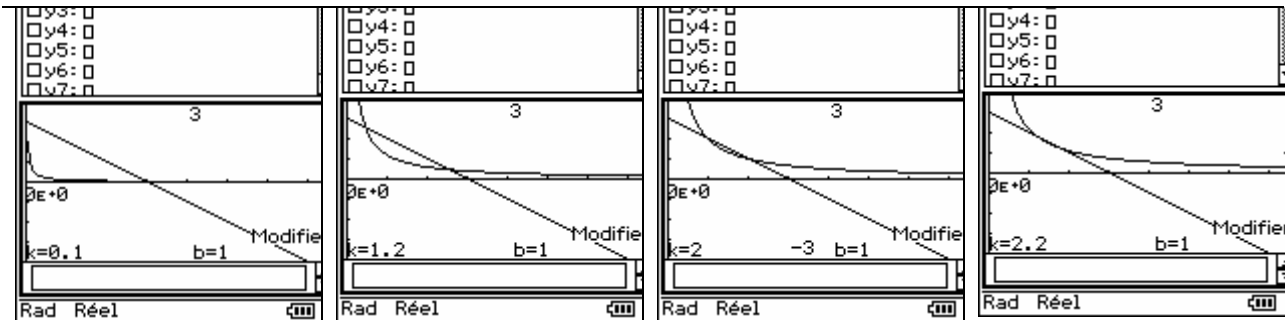
Nombre de solutions de l'équation (E), suivant les valeurs de  $k$  :

Pour  $k < 0$ , il y a un seul point d'intersection

Pour  $k = 0$ , il y a un seul point d'intersection.  
 Pour déterminer ce point, on peut utiliser le menu Analyse – Solveur Graphique – Intersection.

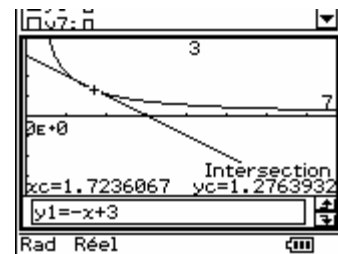
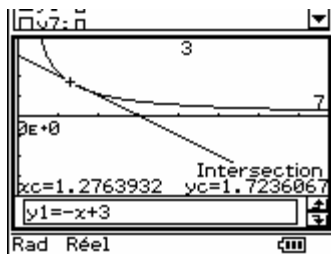
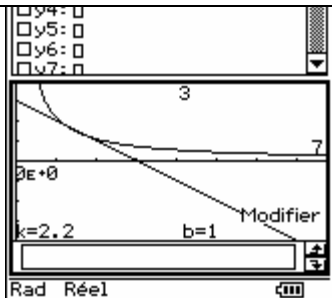


Pour  $0 < k < 2,2$ , il y a deux points d'intersection

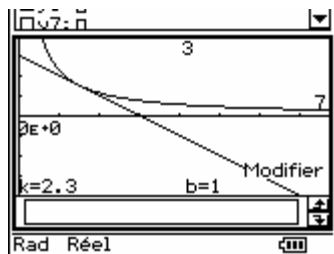


Pour  $k = 2,2$ , on a bien deux points d'intersection

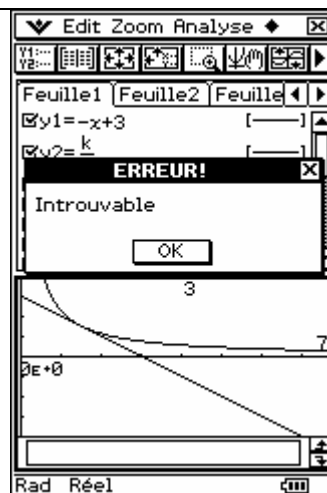
En utilisant le menu Analyse – Solveur Graphique – Intersection, on obtient les coordonnées des points d'intersection entre la courbe et la droite.



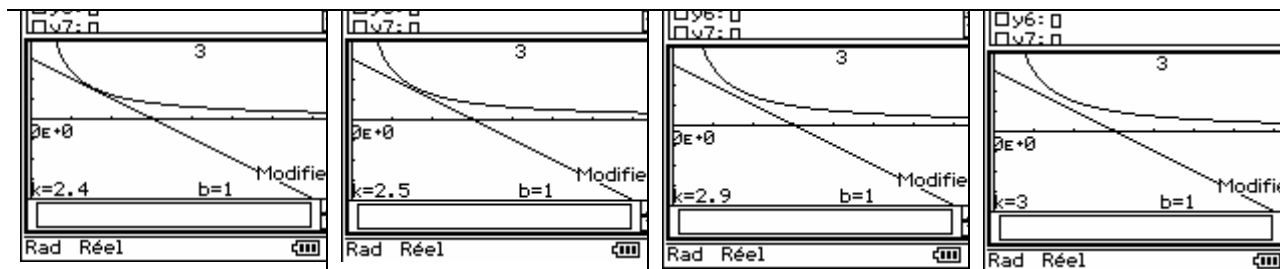
Pour  $k = 2,3$ , il n'y a pas de points d'intersection.



Vérification



Pour  $k > 2,3$ , il n'y a pas de points d'intersection



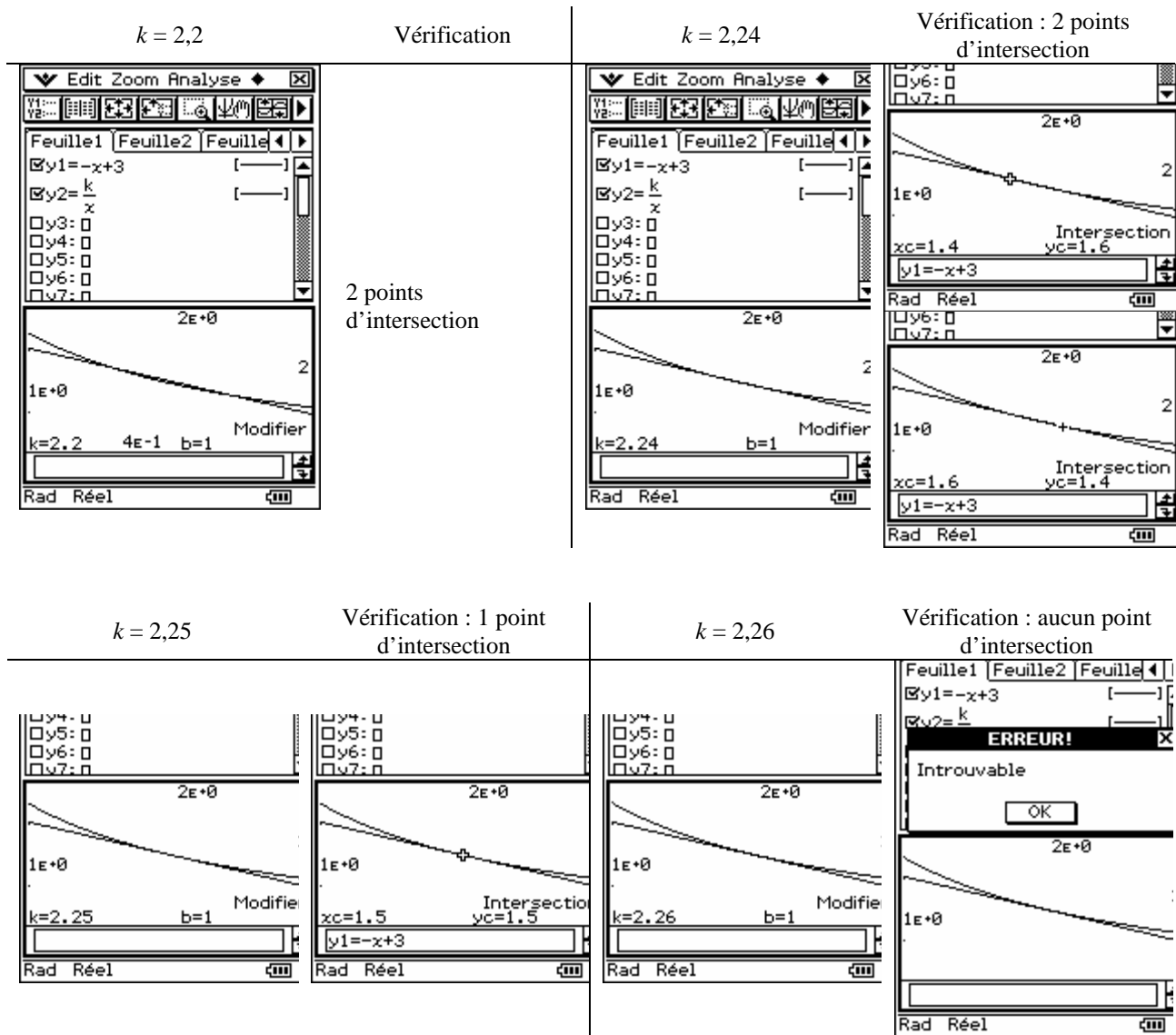
### En conclusion

- Si  $k \leq 0$ , il y a un seul point d'intersection. L'équation (E) a une unique solution.
- Si  $0 < k < 2,2$ , il y a deux points d'intersection. L'équation (E) a deux solutions.
- Si  $2,2 < k < 2,3$ , il semblerait qu'il y ait un seul point d'intersection. La droite d'équation  $y = -x + 3$  serait tangente à la courbe représentative de la fonction  $x \mapsto \frac{k}{x}$ .
- Si  $k \geq 2,3$ , il n'y a pas de points d'intersection. L'équation (E) n'a pas de solution.

- b) Si  $k > 0$ , trouver graphiquement une valeur approchée de  $k$  pour laquelle l'équation (E) a une unique solution.

D'après les réponses précédentes, si  $2,2 < k < 2,3$ , il semblerait qu'il y ait un seul point d'intersection.

Modifions le pas d'incrémentation dans le menu Graph dynamique. (pas à 0,01)



**2,25 est une valeur approchée de  $k$  pour laquelle l'équation (E) a une unique solution.**

2. Démontrer que pour  $k < 0$ , l'équation (E) a une unique solution.

Il y a deux méthodes :

- Première méthode : **résolution algébrique**

$k < 0$

(E) :  $-x + 3 = \frac{k}{x}$  pour  $x$  strictement positif

$$-x + 3 = \frac{k}{x} \quad D = ]0 ; +\infty[$$

$$-x + 3 = \frac{k}{x} \Leftrightarrow -x^2 + 3x - k = 0 \quad (x \neq 0)$$

C'est une équation du second degré, calculons le discriminant.

$$\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-k) = 9 - 4k > 0 \quad (k < 0 \text{ d'où } -4k > 0)$$

L'équation (E) admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{9 - 4k}}{2 \times (-1)} = \frac{3 + \sqrt{9 - 4k}}{2} \in D$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{9 - 4k}}{2 \times (-1)} = \frac{3 - \sqrt{9 - 4k}}{2} \notin D$$

$$\text{Montrons que } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{9 - 4k}}{2 \times (-1)} = \frac{3 - \sqrt{9 - 4k}}{2} \notin D$$

$k < 0$

$$-4k > 0$$

$$9 - 4k > 9$$

$$\Delta > 9$$

$$\sqrt{9 - 4k} > \sqrt{9}$$

$$\sqrt{\Delta} > 3$$

$$3 - \sqrt{\Delta} < 0$$

$$\text{Donc } x_2 = \frac{3 - \sqrt{9 - 4k}}{2} < 0$$

La fonction racine est strictement croissante sur  $[0 ; +\infty[$

Cette solution n'appartient à l'ensemble de définition D.

Pour  $k < 0$ , l'équation  $-x + 3 = \frac{k}{x}$  ( $x > 0$ ) a une unique solution. Cette solution est de la forme  $x = \frac{3 + \sqrt{9 - 4k}}{2}$ .

- Deuxième méthode : **résolution graphique**

$k < 0$

(E) :  $-x + 3 = \frac{k}{x}$  pour  $x$  strictement positif

$$-x + 3 = \frac{k}{x} \quad D = ]0 ; +\infty [$$

$$-x + 3 = \frac{k}{x} \Leftrightarrow -x^2 + 3x = k \quad (x \neq 0)$$

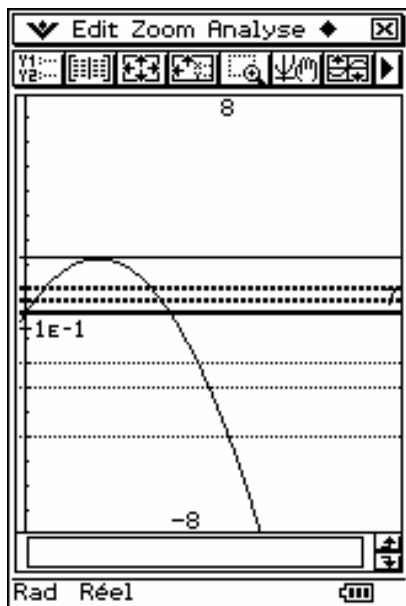
Pour résoudre cette équation graphiquement, nous devons tracer la parabole d'équation  $y = -x^2 + 3x$  et la droite horizontale d'équation  $y = k$  ( $k < 0$ ).

La parabole d'équation  $y = -x^2 + 3x$  est dirigée vers le bas. Elle passe par les points O et A (3 ; 0). ( en effet  $y = -x^2 + 3x = -x(x - 3)$  )

Le sommet S de cette parabole a pour coordonnées  $(\frac{3}{2}; \frac{9}{4})$

$$x_S = \frac{-3}{2 \times (-1)} = \frac{3}{2}$$

$$y_S = -(\frac{3}{2})^2 + 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$



Pour  $k > \frac{9}{4}$ , l'équation (E) n'admet pas de solutions

Pour  $k = \frac{9}{4} = 2,25$ , l'équation (E) admet une solution

Pour  $0 < k < \frac{9}{4}$ , l'équation (E) admet deux solutions

Pour  $k = 0$ , l'équation (E) admet une solution  $x = 3$   
(l'autre solution  $x = 0 \notin ]0 ; +\infty [$ )

Pour  $k < 0$ , l'équation (E) admet une solution.

Niveau : 1<sup>ère</sup> S

Durée : 2h en classe entière (24 élèves) et 1h pour un groupe de 6 élèves

## **II. Objectifs :**

- Sujet type bac
- Etudier le nombre de solutions d'une équation
- Réinvestir les notions de tangente et de paramètre.
- Utiliser la calculatrice ClassPad Casio en utilisant le logiciel dynamique.
- Faire le lien entre résolution graphique et algébrique.
- Faire une démonstration « correcte ».

## **III. Niveau du TP :**

Pré requis : fonctions de référence, fonction trinôme du 2<sup>nd</sup> degré.

## **IV. Déroulement :**

Pendant la première heure, le groupe de 24 élèves a réfléchi au sujet. Le professeur n'est intervenu qu'au bout d'une demi heure. Lire correctement l'énoncé pose encore des problèmes pour certains et la notion de paramètre et l'interprétation graphique ne sont pas encore assimilées par tous. Une fois les explications données, tous les élèves ont réussi à répondre aux questions 1. a) et b).

Pendant la deuxième heure, ils (seul ou par groupe de 2) devaient rédiger la démonstration sur feuille (les documents cours étaient à leur disposition).

Pendant ce temps le professeur interrogeait les 6 autres élèves comme au bac.

Les aides fournies ont été essentiellement sur la calculatrice. Très peu d'aide mathématique. Ils ont compris les notions de position d'une droite par rapport à une courbe, paramètre et de tangente. Par contre ils ne sont pas arrivés à la démonstration (manque de temps ou difficulté de la question (certains avaient des idées mais ne savaient pas les rédiger).

## **V. Modifications :**

- Modifier la question 1. b) donner une valeur approchée de  $k$  à  $10^{-2}$  près.