Exemple de l'utilisation de la ClassPad pour déterminer un lieu géométrique :

Bourgoing Mariane
Janvier 2008

Problème (d'après un exercice du baccalauréat, France métropolitaine, juin 2002) :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère la courbe Γ d'équation $y=e^x$ et la droite (D) d'équation $y=x$.
Soit t un réel ; M est le point de Γ d'abscisse t. La tangente à Γ au point d'abscisse t coupe l'axe des ordonnées au point N. P est le point de (D) d'abscisse t.
(pour simplifier on a noté M pour M_t ...)
Pour tout t, on considère G l'isobarycentre de O,N,M et P.
Le but est de déterminer le lieu décrit par G lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

PARTIE A : utilisation de la ClassPad pour tracer le lieu géométrique

On lance l'application « Géométrie » dans le menu du ClassPad 300.
Faire apparaître le repère avec les graduations en appuyant deux fois sur
Ne pas oublier de réinitialiser la fenêtre graphique (aller dans Edit puis Tout effacer).

a) Création de la courbe Γ et de la tangente à la courbe en un point :

On crée la courbe Γ en allant dans Tracé, puis Fonction ▶ f(x). (Pour écrire e^x appuyer sur Keyboard puis mth).
On crée la tangente T à Γ en un point quelconque de la courbe. Pour cela, aller dans Tracé puis Construire ▶ tangente à la courbe. Cliquer alors sur la courbe. Un point A de la courbe est créé ainsi que la tangente en A à Γ (cf fig.1).
Pour renommer ce point, cliquer sur ce point puis appuyer sur ▶(cf (1)) puis sur ▼ ; sélectionner (cf fig.2) et taper M en appuyant sur Keyboard puis abc .)

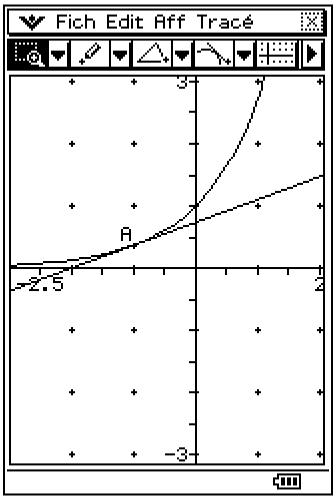


Fig.1

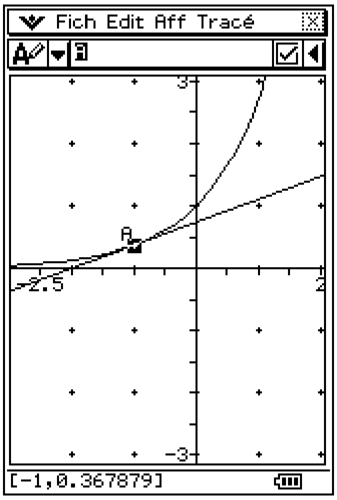


Fig.2

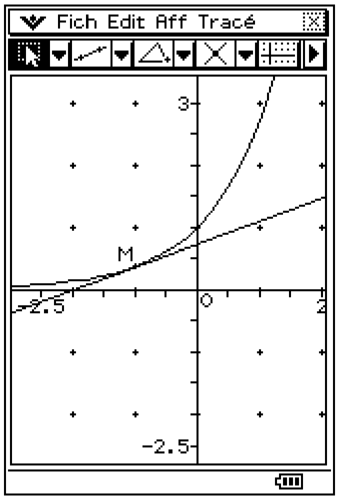


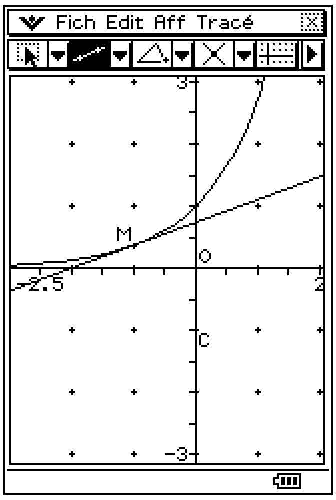
Fig. 3

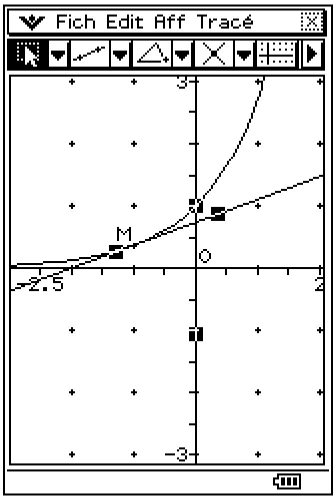
b) Création des points O et N :

On crée le point O(0;0). Pour cela appuyer sur ▼ puis sur . De même que précédemment, renommer le point ainsi obtenu O.

On va créer la droite (Oy). On crée d'abord le point de coordonnées $(0;-1)$ par exemple (appelé C automatiquement) puis on appuie sur ▼ et sur (cf fig. 4) et on sélectionne les points O et C. Comme C ne nous intéresse pas, on peut effacer le nom en sélectionnant le point C (et seulement lui), en allant dans Edit puis Propriétés et Cacher nom.

Le point N est le point d'intersection de la tangente T et de la droite (Oy). Pour créer ce point d'intersection, on sélectionne les deux droites. (Se positionner près d'une droite et faire glisser le stylet jusqu'à la droite; elle est sélectionnée lorsque deux carrés noirs apparaissent sur la droite) (cf fig.5)
On appuie alors sur ▼ puis sur et on renomme ce point d'intersection N.





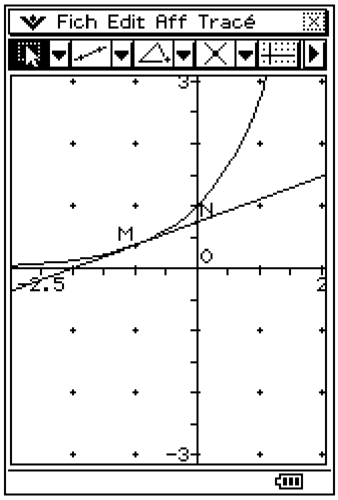
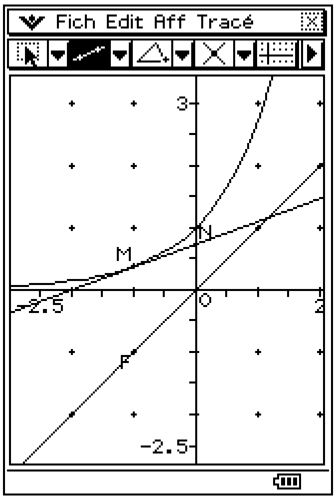
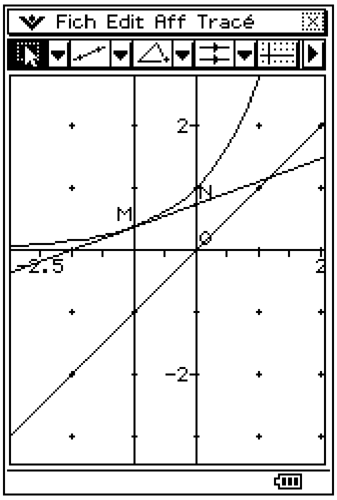


fig.4 fig. 5 fig.6

c) Création du point P :

le point P est le point ayant la même abscisse que M et appartenant à la droite (D).
On crée d'abord la droite (D) d'équation y = x. C'est la droite (OF) avec $F(-1;-1)$ par exemple (cf fig.7) puis on efface le nom du point F.
On crée la droite (D_1) parallèle à (Oy) et passant par M. On sélectionne la droite (Oy) et le point M puis on appuie sur $\boxed{\perp}$ ▼ et sur $\boxed{\pm}$ (cf fig.8). On crée ensuite P comme point d'intersection des droites (D) et (D_1) (cf fig. 9)





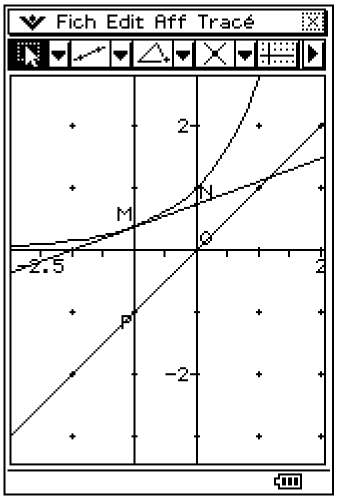


fig. 7 fig. 8 fig. 9

d) Création de l'isobarycentre des points M,N, O et P :

G est le barycentre de (O,1),(N,1),(M,1) et (P,1).
Soient A le barycentre de (O,1),(N,1) ; c'est le milieu de [ON] et B celui de (M,1) et (P,1) ; c'est le milieu de [MP]. D'après l'associativité du barycentre, G est le barycentre de (A,2) et (B,2) soit le milieu de [AB].
On commence donc par créer le milieu de [ON]. Pour cela, on sélectionne les points O et N puis on appuie sur $\boxed{\perp}$ ▼ puis sur $\boxed{-\cdot-}$ (cf fig. 10). De même, on crée le milieu de [MP] puis le milieu de [AB] que l'on renomme G (cf fig. 11). Il n'est pas utile de renommer les points H et I crées ci-dessous en A et B car on va effacer les noms des points A et B pour rendre l'image plus claire (cf. fig12).

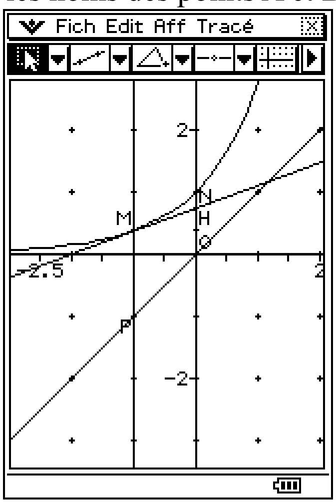
fig.10


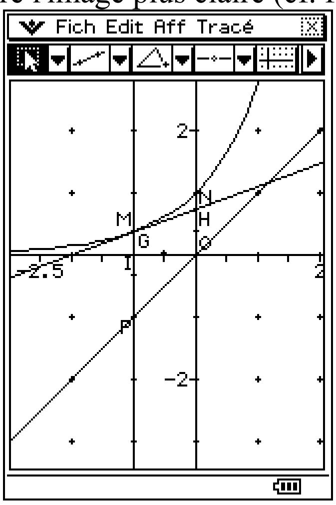
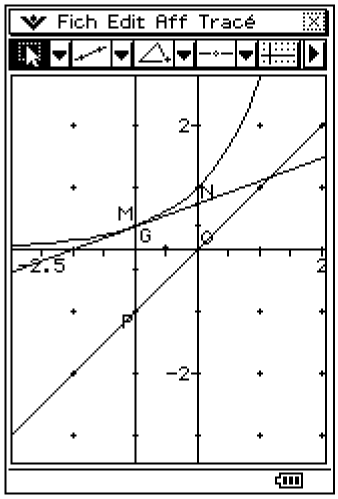
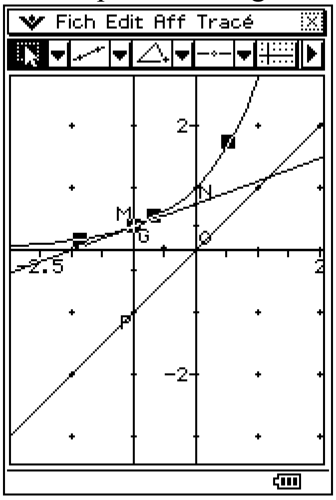
fig.11


fig.12


e) Animation du point M et tracé du lieu décrit par le point G :

Pour animer le point M sur la courbe Γ **,** sélectionner le point M et la courbe Γ (cf fig. 13) puis aller dans Edit ; Animer ; Ajouter Animation et encore Edit ; Animer et Editer Animation.
Apparaît alors la fenêtre (cf fig. 14). (t0 et t1 correspondent respectivement à la valeur minimale et à la valeur maximale de l'abscisse t de M, prendre par exemple : t0 = -10 et t1 = 3.)
Puis cliquer sur la figure et appuyer sur Resize



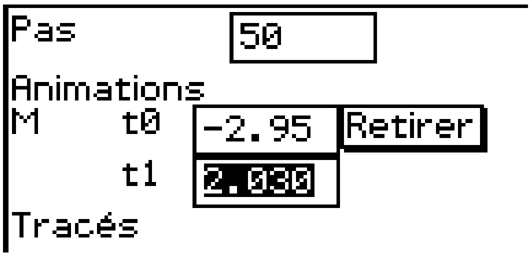
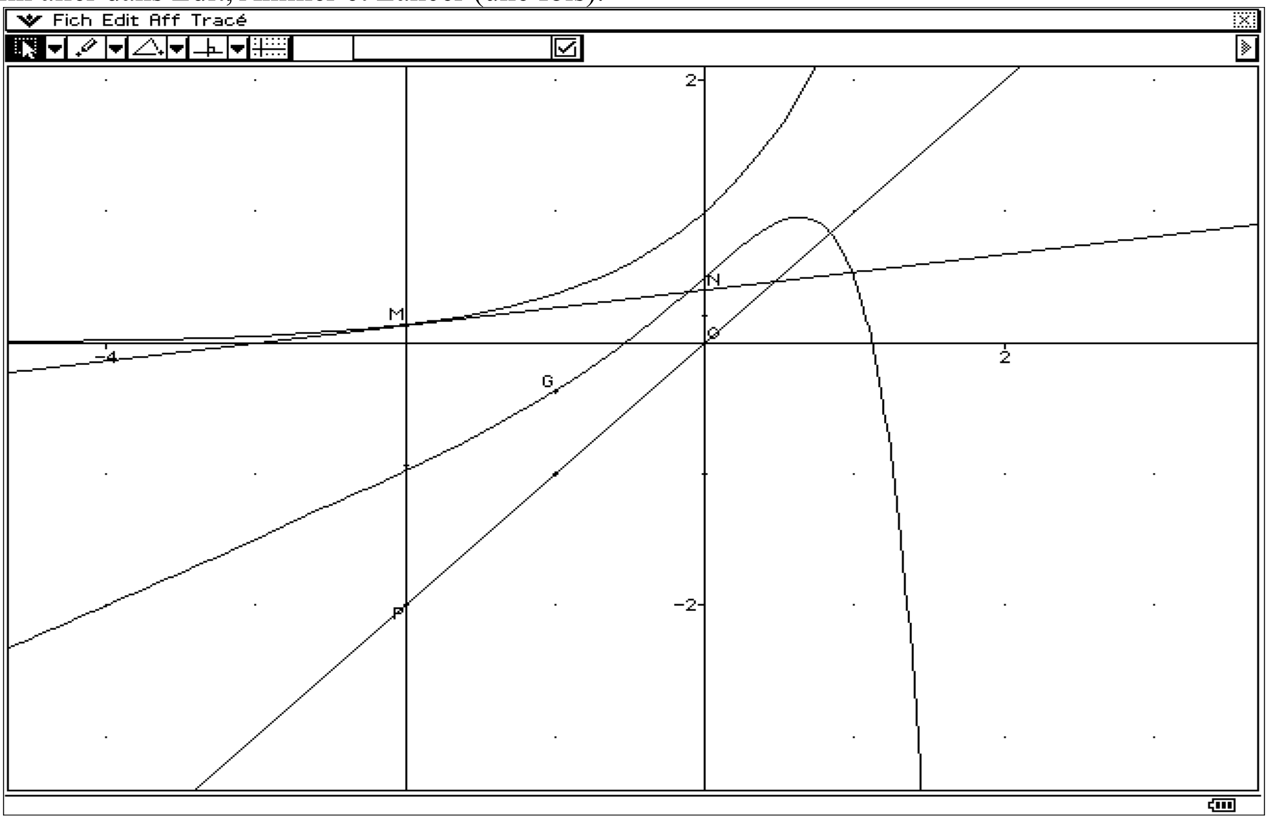


fig. 14

fig. 13

Pour faire tracer le point G, sélectionner le point G puis dans Edit ; Animer et Tracé.
Enfin aller dans Edit, Animer et Lancer (une fois).

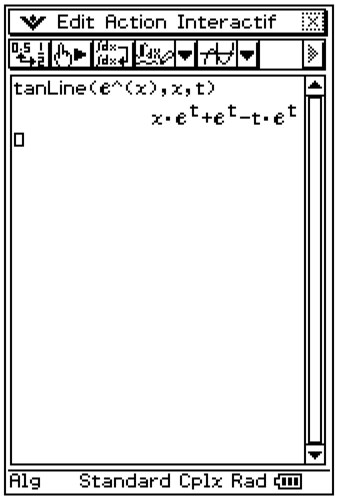


Ainsi lorsque t décrit $\mathbb{R}$, G semble décrire la courbe d'une fonction f.

Partie B : Utilisation de la ClassPad pour faire les calculs

Lancer l'application « principale » dans le menu de la ClassPad.

fig.1



a) Détermination des coordonnées du point N :

On détermine d'abord une équation de la tangente à la courbe.
Aller dans Action puis Calcul et tanLine puis taper : $e^{(x)}, x, t$) (cf fig.1)
Il suffit alors de choisir x = 0 pour obtenir l'ordonnée du point N.

b) Définition des points O,M,N,P et calcul des coordonnées de G :

On va définir points M, N, O et P avec leurs coordonnées.
Taper $O:=[0,0]$; $M:=[t, e^t]$; $N:=[0 ; e^t(1-t)]$ et $P:=[t, t]$. (cf fig. 2)
(pour obtenir les : appuyer sur Keyboard puis abc, pour les [ ] dans abc appuyer sur SMBL). Les coordonnées de l'isobarycentre des points O,M,N et P s'obtiennent en tapant $\frac{M+N+O+P}{4}$ (cf fig.3)

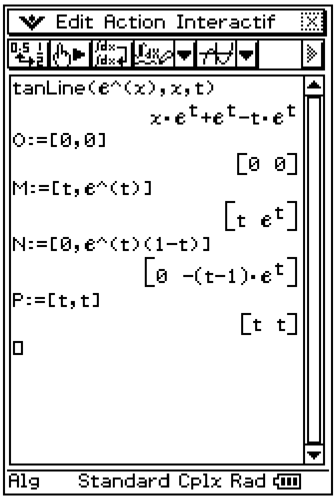


fig. 2

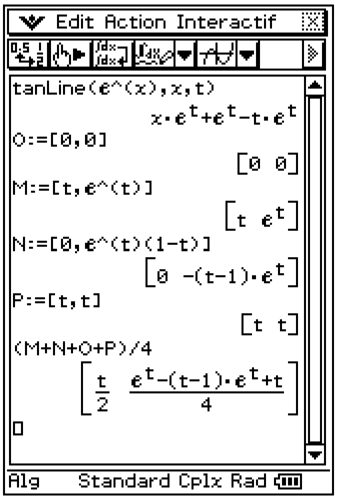


fig. 3

On définit alors la fonction $g: t \rightarrow \frac{e^t-(t-1)e^t+t}{4}$.

Pour cela, aller dans Action puis Commande et Define.
Taper alors g(t) = puis recopier l'expression de la fonction (la sélectionner (cf fig.4) puis faire glisser à côté du = (cf. fig.5).

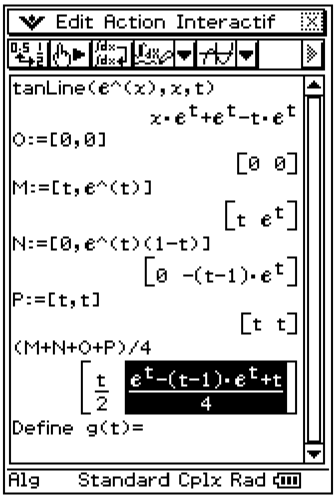


fig.4

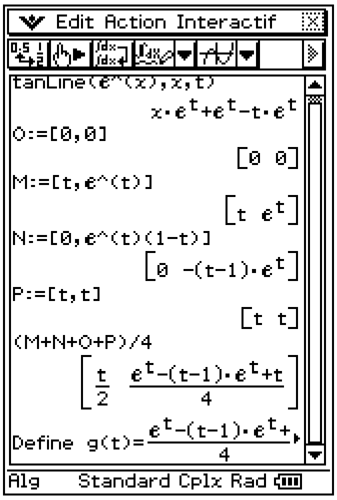


fig. 5

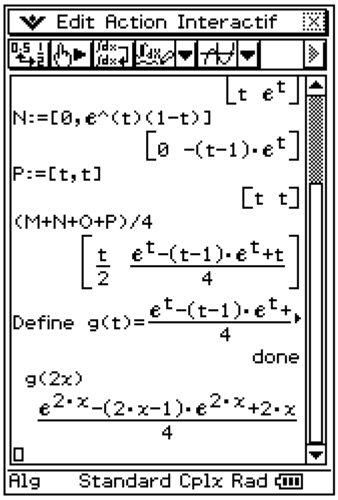


fig.6

c) Lieu décrit par le point G :

Si l'on pose $x=\frac{t}{2}$ alors $g(t)=g(2x)$. On calcule donc $g(2x)$ (cf. fig. 6 ci-dessus).
On peut simplifier l'expression de $g(2x)$ en allant dans Action Transformation simplify (cf. fig. 7)
Donc lorsque t décrit $\mathbb{R}$, x décrit $\mathbb{R}$ et le point G décrit la courbe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f: x \rightarrow \frac{e^{2x}-xe^{2x}+x}{2}$.

Pour vérifier que cela correspond bien à la courbe obtenue précédemment, taper sur [graph], régler la fenêtre graphique en allant dans [window] (cf. fig. 8) puis sélectionner l'expression de $f(x)$ et la faire glisser dans la fenêtre graphique. La courbe de f est tracée (cf. fig. 9)

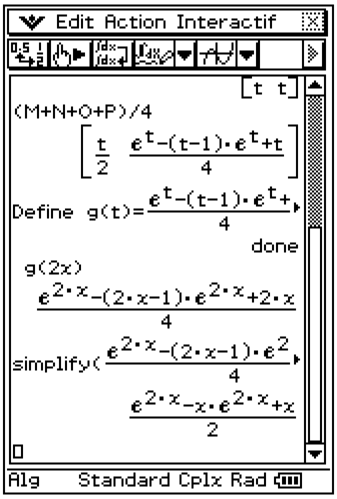


fig.7

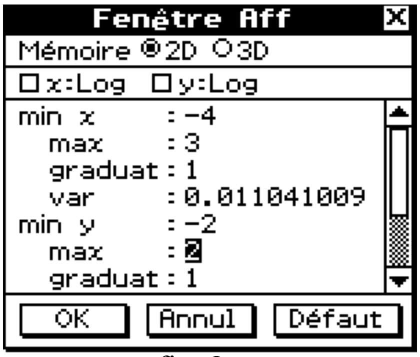


fig. 8

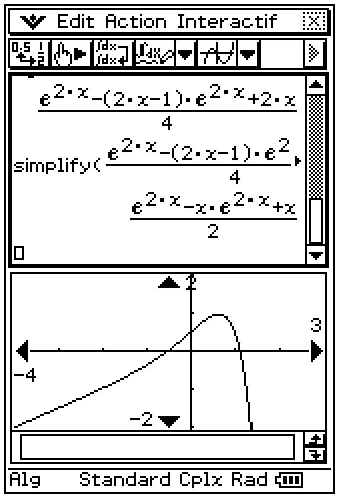
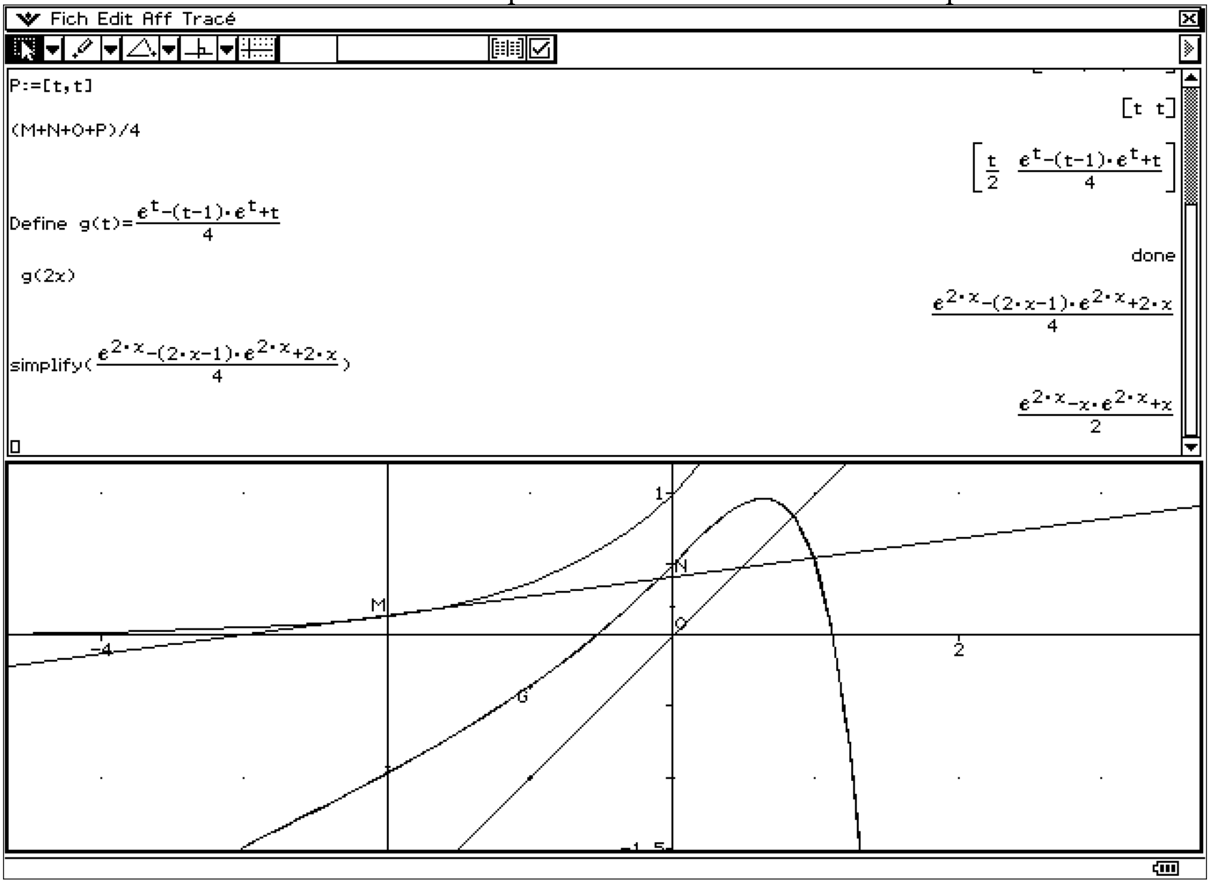


fig. 9

On reconnaît bien la courbe obtenue dans la partie A.
On peut aussi retourner dans le menu « géométrie »appuyer sur au lieu de puis tracer de même que précédemment la courbe de f et vérifier que cela coïncide bien avec le lieu précédemment tracé.



PARTIE C : Démonstration mathématique

Soit $t \in \mathbb{R}$, M est le point de Γ d'abscisse *t* soit $M(t\,;e^t)$.
La tangente (Δ_t) à Γ au point M a pour équation $y=g'(t)(x-t)+g(t)$, avec
$g(x)=e^x \Rightarrow g'(x)=e^x$. soit (Δ_t): $y=e^t(x-t)+e^t=e^t x+e^t(1-t)$. Donc $N(0\,;e^t(1-t))$.

P est le point de D d'abscisse *t* soit $P(t\,;t)$.
G est l'isobarycentre des points O,M,N et P donc :

$$G\left(\frac{0+t+0+t}{4};\frac{0+e^t+e^t(1-t)+t}{4}\right) \text{ soit } G\left(\frac{t}{2};\frac{e^t(2-t)+t}{4}\right).$$

Lorsque t décrit $\mathbb{R}$, $\frac{t}{2}$ décrit $\mathbb{R}$. Posant $x=\frac{t}{2}$ alors : $y_G=\frac{e^{2x}(2-2x)+2x}{4}=\frac{x+e^{2x}(1-x)}{2}$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x+e^{2x}(1-x)}{2}$ alors $G(x\,;f(x))$ avec $x=\frac{t}{2}$

Donc lorsque *t* décrit $\mathbb{R}$, x décrit $\mathbb{R}$ et G décrit la courbe représentative de la fonction f .