

CALENDRIER 2017

Arithmétique

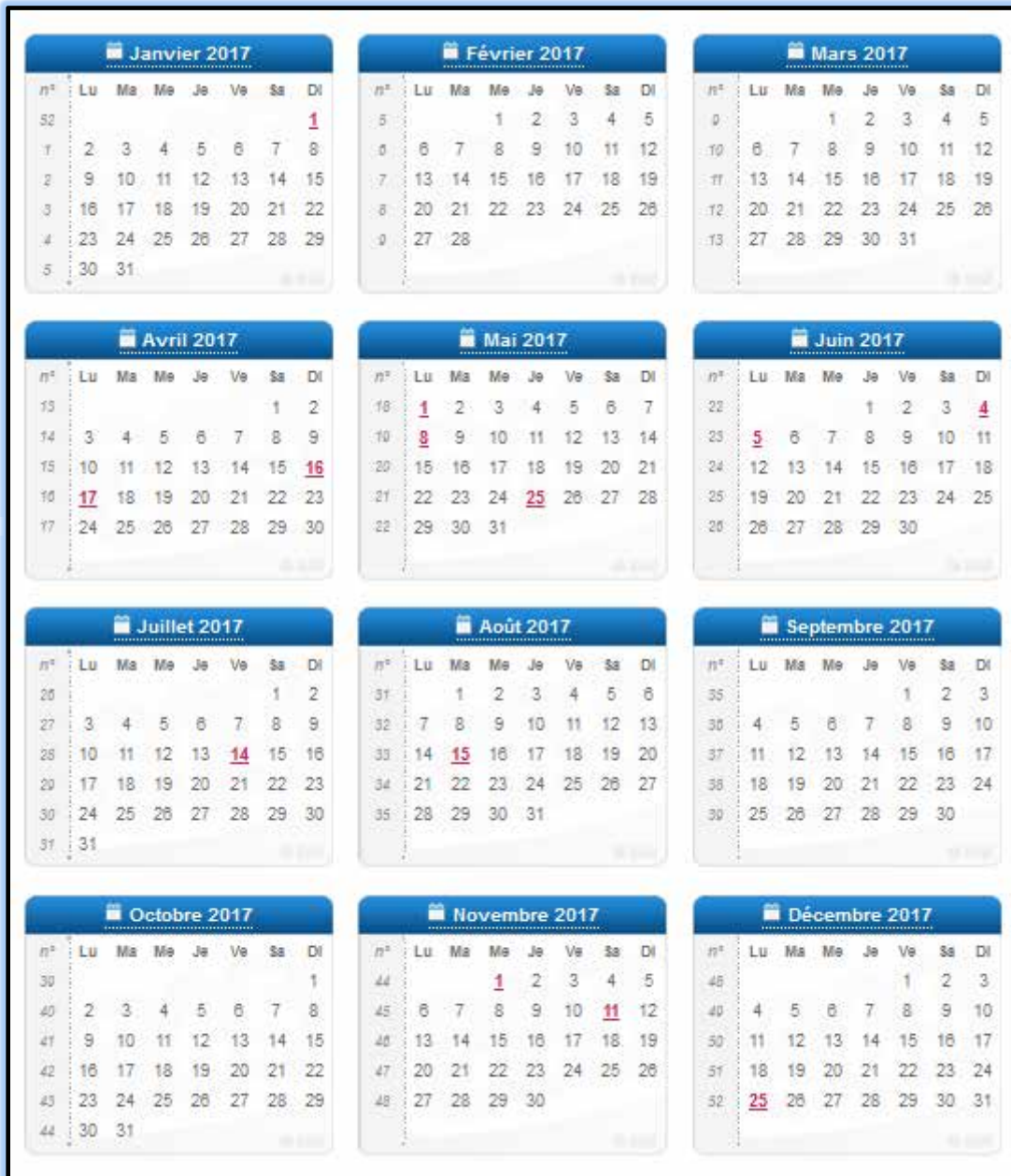
Calcul littéral

Auteur : Ezéchiël Rencker



EXERCICE

ÉNONCÉ : voici le calendrier de l'année 2017



On peut grouper les cases de chaque mois de ce calendrier en carrés de différentes tailles. Par exemple avec le calendrier du mois de janvier 2017, on peut y dessiner des carrés de côté 2 dates (noir) ; de côté 3 dates (vert) ; de côté 4 dates (rouge).

Janvier 2017							
semaine	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
52							1
1	2	3	4	5	6	7	8
2	9	10	11	12	13	14	15
3	16	17	18	19	20	21	22
4	23	24	25	26	27	28	29
5	30	31					

1. Combien de carrés de dimension 2×2 peut-on construire au mois de février 2017 ? Et de carré de dimension 3×3 ? 4×4 ? 5×5 ?
2. Au mois de mars 2017, choisir plusieurs carrés de dimension 2×2 puis calculer la différence entre les produits des deux nombres situés aux extrémités des diagonales.
3. Tester sur plusieurs autres carrés de dimension 2×2 de l'année 2017 ; que peut-on conjecturer ?
Démontrer cette conjecture, on pourra poser x à la place de la première valeur du carré et effectuer les calculs en fonction de x .
4. Reprendre la question 3. pour un carré de dimension 4×4 et 5×5 . Quelles conjectures peut-on émettre ?
5. Démontrer ces conjectures.

CORRECTION :

Il s'agit ici d'un problème ouvert utilisant un outil du quotidien, un calendrier. L'élève verra ainsi l'utilité du calcul littéral pour démontrer une conjecture originale.

1. Sur la 1^{ère} ligne il est possible de construire 4 carrés de côté 2 dates ; sur chacune des 2 lignes suivantes il est possible de construire six carrés de côté 2 dates et il restera 1 carré à construire sur la 4^{ème} ligne, soit $4 + 2 \times 6 + 1$ d'où 17 carrés de côté 2 dates sont constructibles au mois de février 2017.

De même, on trouve $3 + 5$ d'où 8 carrés de côté 3 dates, 2 carrés de côté 4 dates et aucun carré de côté 5 dates.

Février 2017							
semaine	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
5			1	2	3	4	5
6	6	7	8	9	10	11	12
7	13	14	15	16	17	18	19
8	20	21	22	23	24	25	26
9	27	28					

2. Mois de mars 2017, la différence entre les produits des deux nombres situés aux extrémités des diagonales nous donne -7 :

Mars 2017							
semaine	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
9			1	2	3	4	5
10	6	7	8	9	10	11	12
11	13	14	15	16	17	18	19
12	20	21	22	23	24	25	26
13	27	28	29	30	31		

$$16 \times 24 - 23 \times 17 = -7$$

Avec le carré suivant on obtient aussi -7

$$18 \times 26 - 25 \times 19 = -7$$

Testons avec le premier carré du mois de mars 2017 ; on obtient également -7

$$1 \times 9 - 8 \times 2 = -7$$

3. Ici, la différence entre les produits des deux nombres situés aux extrémités des diagonales du premier carré donne -7 :

Septembre 2017							
semaine	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
35					1	2	3
36	4	5	6	7	8	9	10
37	11	12	13	14	15	16	17
38	18	19	20	21	22	23	24
39	25	26	27	28	29	30	

$$5 \times 13 - 6 \times 12 = -7$$

et pour le deuxième carré :

$$22 \times 30 - 29 \times 23 = -7$$

Décembre 2017							
semaine	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
48					1	2	3
49	4	5	6	7	8	9	10
50	11	12	13	14	15	16	17
51	18	19	20	21	22	23	24
52	25	26	27	28	29	30	31

Ici, la différence entre les produits des deux nombres situés aux extrémités des

diagonales du premier carré donne -7 :

$$18 \times 26 - 25 \times 19 = -7$$

et pour le deuxième carré :

$$23 \times 31 - 30 \times 24 = -7$$

Il semblerait que toutes les différences entre les produits des deux nombres situés aux extrémités des diagonales des carrés de côté 2 dates donnent comme résultat le nombre -7.

Démontrons cette conjecture :

On remplace par exemple le nombre correspondant au 18^{ème} jour du mois de décembre par x , dans ce cas on remplacera le 19^{ème} par $x + 1$, le 25^{ème} par $x + 7$ et le 26^{ème} par $x + 8$.

La différence entre les produits des deux nombres situés aux extrémités des diagonales du carré donne alors le calcul suivant :

$$x(x + 8) - (x + 7)(x + 1) = x^2 + 8x - (x^2 + x + 7x + 7) = -7$$

Nous venons de prouver que la conjecture énoncée précédemment est vraie pour tous les jours du calendrier !

Testons à l'aide de l'outil *Calc* de la calculatrice fx-92+ Spéciale Collège. Se déplacer dans le menu *Calcul*. Entrer la formule décrite précédemment et appuyer sur la touche **CALC**. Taper ensuite les valeurs désirées.

$$x(x+8) - (x+7)(x+1)$$

$$x = 18$$

$$x(x+8) - (x+7)(x+1)$$

$$-7$$

Ici on teste l'égalité pour le carré commençant par le 18ème jour du mois.

$$x(x+8) - (x+7)(x+1)$$

$$x = 23$$

$$x(x+8) - (x+7)(x+1)$$

$$-7$$

Ici on teste l'égalité pour le carré commençant par le 23ème jour du mois.

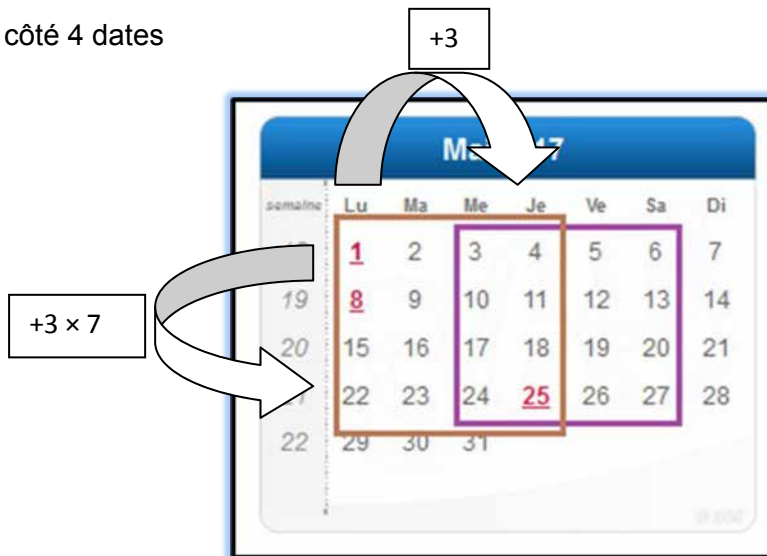
Vérification à l'aide du Menu *Vérification* de la calculatrice fx-92+ Spéciale Collège (on veillera à stocker au préalable une valeur quelconque dans la variable x , par exemple $\frac{3\pi}{4}$, avant de tester l'égalité) :

$$x(x+8) - (x+7)(x+1) \triangleright$$

$$\text{Vrai}$$

$$\leftarrow 3) - (x+7)(x+1) = -7$$

4. Carré de côté 4 dates



Pour le carré brun,

$$1 \times 25 - 22 \times 4$$

$$-63$$

Pour le carré violet,

$$3 \times 27 - 24 \times 6$$

$$-63$$

Démonstration :

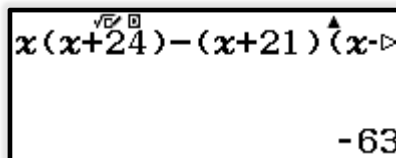
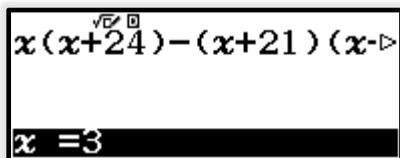
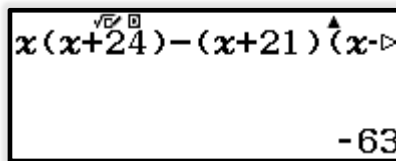
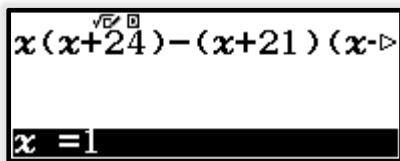
En remplaçant le premier jour du mois par le nombre x , le 25^{ème} jour correspondra alors au nombre $x + 3 + 3 \times 7 = x + 24$; le 22^{ème} jour correspondra au nombre $x + 3 \times 7 = x + 21$ et le 4^{ème} jour au nombre $x + 3$.

La différence entre les produits des deux nombres situés aux extrémités des diagonales du premier carré donne alors le calcul suivant :

$$x(x + 24) - (x + 21)(x + 3) = x^2 + 24x - (x^2 + 3x + 21x + 63) = -63$$

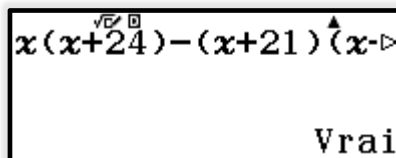
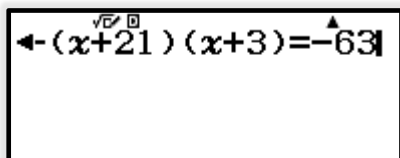
On obtient une différence de -63 quelques soient les carrés de dates de dimension 4 choisies dans le calendrier ; c'est bien ce que nous cherchions à prouver, la conjecture émise est donc vraie.

Testons à l'aide de l'outil *Calc* de la calculatrice fx-92+ Spéciale Collège.



Vérification à l'aide du Menu *Vérification* de la calculatrice fx-92+ Spéciale Collège

(on veillera à stocker au préalable une valeur quelconque dans la variable x , par exemple $\frac{3\pi}{4}$, avant de tester l'égalité) :



5. Carré de côté 5 dates

Il est tout simplement impossible de construire un carré de côté 5 dates dans un calendrier.

En effet, il y a un maximum de 31 jours dans un mois, soit 4 lignes de 7 jours au maximum et il reste alors uniquement 3 jours...

Or il en faudrait 5 pour construire un carré de 5x5.



Retrouvez toutes nos ressources pédagogiques sur www.casio-education.fr