LA TOUR DE PISE - TRIANGLES RECTANGLES

Collège

Triangles rectangles
Thalès
Triangles semblables

Auteur : Ezéchiel Rencker

EXERCICE

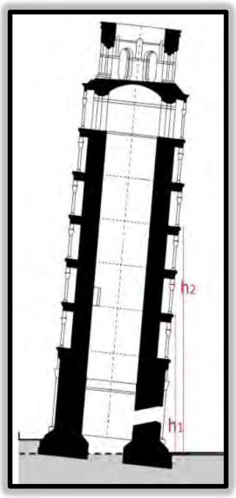
ENONCE

Emilio se prend pour Galilée : il monte au deuxième étage de la tour de Pise et laisse tomber une pierre côté sud de la tour (à droite de la tour sur la photo). Il monte ensuite au quatrième étage pour rééditer son expérience. Pour se convaincre il souhaite monter au 6ème étage pour y lancer un dernier caillou … mais l'accès y est condamné pour raison de sécurité ☹

Photo :E. Rencker

Il observe avec curiosité que ses cailloux ne tombent pas aux mêmes endroits ; qu'en penses-tu ?

Valérie est au pied de la tour, prend des mesures et réalise le schéma suivant.



Avec h_1 =17,882m et h_2 = 29,591m

Le caillou jeté du 2ème étage tombe à 3,28m du pied de la tour et celui jeté du 4ème étage tombe à 5,46m du pied de la tour.

Peux-tu prévoir où tombera le caillou lancé depuis le 6ème étage ?

Prolongement de l'exercice : Calculer la pente de l'édifice.

Introduction - présentation

Il s'agit d'un problème ouvert, l'élève a donc le choix de la stratégie à adopter pour la résolution de l'exercice il peut :

- Raisonner en utilisant l'égalité de Pythagore
- Reconnaitre une situation de Thalès
- Reconnaitre une situation géométrique de triangles semblables
- Ou simplement donner un ordre de grandeur

1. Correction – commentaires

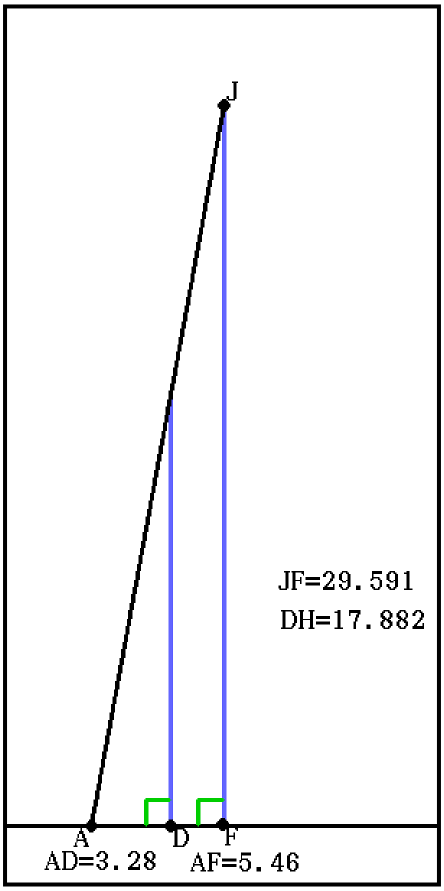
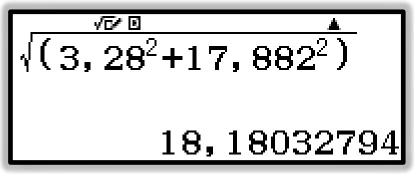
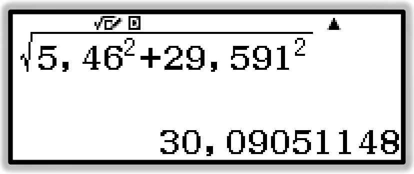


Schéma de la situation (réalisé avec le logiciel ClassPad Manager)

Correction	Correction avec la fx-92+ Spéciale Collège
1. La tour de Pise est « penchée », c'est-à-dire décalée par rapport à la verticale du sol. Lorsque l'on laisse tomber un caillou depuis le point H, celui-ci tombe à la verticale c'est-à-dire à la perpendiculaire du sol ; on obtient alors un triangle rectangle ADH et le caillou tombe du coup à une distance AD du pied de la tour. On retrouve le même principe dans le triangle AJF ; lorsque l'on laisse tomber un caillou depuis le 4ème étage, celui-ci atterrit à une distance AF du pied de la tour ! Il était donc prévisible que les cailloux ne tombent pas au même endroit selon qu'on le lance depuis le 2ème ou le 4ème étage de la tour de Pise. On n'obtiendrait pas le même résultat depuis la tour Eiffel ☺ 2. Dans le triangle ADH rectangle en D, d'après l'égalité de Pythagore on a donc : AH² = AD² + DH² D'où AH = $\sqrt{3{,}28^2+17{,}882^2}$ AH = 18,18m au cm près. De même on trouve AJ = $\sqrt{5{,}46^2+29{,}591^2}$ AJ = 30,09m au cm près.	 Stockons cette valeur dans la variable y.   Stockons cette valeur dans la variable x. 

Les étages semblent répartis uniformément, on peut donc estimer que la hauteur entre le 4ème et le 2èmeest la même que celle entre le 6ème et le 4ème étage ; d'où AM, la distance séparant le 6ème étage au sol est égale à:

AM = AJ + (AJ – AH)
= 30,09 + (30,09 – 18,18)
= 42 m

On connait maintenant la « hauteur » du 6ème étage de la tour de Pise, elle est d'environ 42m.

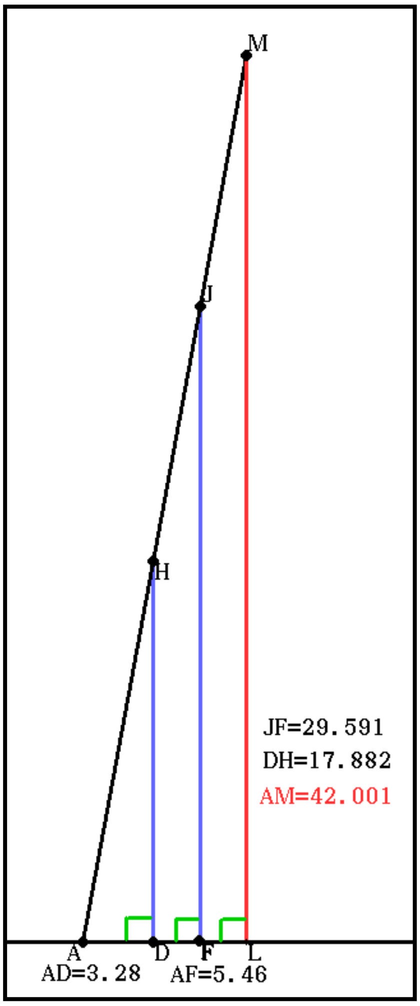
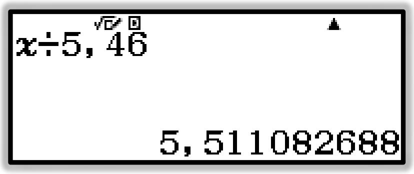


Schéma de la situation (réalisé avec le logiciel ClassPad Manager)

Ici on a posé x = AJ et y = AH, la hauteur AM correspond alors à $x + (x - y)$
Les valeurs exactes étant stockées dans les variables x et y, calculons la valeur de l'expression $x + (x - y)$:

D'où AM= 42 m au cm près.

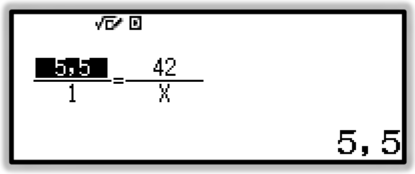
Observations :



D'où :$\frac{AJ}{AF} =$ 5,5 au dixième près.

Et : $\frac{AH}{AD}$ = 5,5 au dixième près.
On observe ici quasiment le même rapport ; est-ce une coïncidence ?
En fait les triangles AHD et AJF sont des triangles dits semblables ; AJF est un agrandissement du triangle AHD. On peut faire le même raisonnement pour le triangle AML qui est un triangle semblable aux triangles AHD et AJF ; c'est donc également un agrandissement des triangles AJF et AHD. On retrouvera le même rapport d'agrandissement d'environ 5,5 pour le triangle AML, $\frac{AM}{AL}$ est donc environ égal à 5,5. D'où $\frac{42}{AL}$ = 5,5

A l'aide de du Menu QUOTIENT :

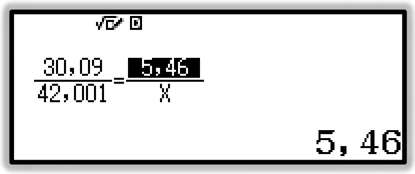


D'où AL est environ égal à 7,64m au cm près.
En lançant un caillou depuis le 6ème étage de la tour de Pise, Emilio retrouverait son caillou à 7,64m du pied de la tour !

Autre méthode :
Dans le triangle MLA, (ML) est perpendiculaire à (AF) et (JF) perpendiculaire à (AF) donc (ML) est parallèle à (JF).
D'après l'égalité de Thalès on a donc :
$\frac{AF}{AL} = \frac{AJ}{AM}$ soit $\frac{5,46}{AL} = \frac{30.09}{42,001}$
D'où AL = 7,62m au cm près.

En lançant un caillou depuis le 6ème étage de la tour de Pise, Emilio retrouverait son caillou à 7,62m du pied de la tour ! On retrouve, aux erreurs d'arrondis près, le même résultat que précédemment.

Autre méthode :
A l'aide de du Menu QUOTIENT :



Prolongement de l'exercice :

Dans le triangle ADH, AFJ ou ALM respectivement rectangle en D, F et L, on peut utiliser la trigonométrie pour estimer l'angle avec lequel la tour s'écarte de la verticale au sol ; autrement dit, comment « penche-t-elle » ?

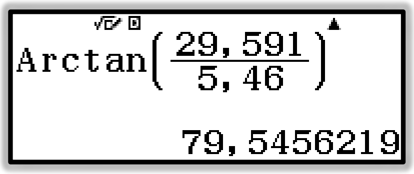
Dans AFJ rectangle en F on a : $\tan(\widehat{JAF}) = \frac{JF}{AF}$,

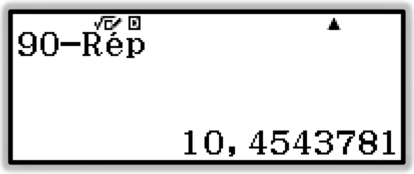
soit $\tan(\widehat{JAF}) = \frac{29{,}591}{5{,}46}$

D'où : $\widehat{JAF}$ = 79,55° par rapport à l'horizontale.

La tour s'écarte donc d'environ 10° par rapport à la verticale au sol !

Prolongement de l'exercice :





Retrouvez toutes nos ressources pédagogiques sur www.casio-education.fr