

OPTIMISATION D'UN VOLUME

Fonction

Tableau de valeurs

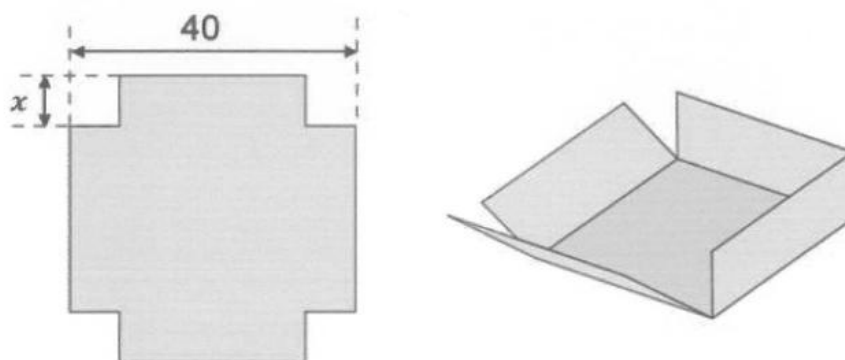
Auteur : Ezéchiel Rencker

**OBJECTIFS :**

- Utilisation d'un tableau de valeurs pour résoudre un problème d'optimisation.
- Faire le lien avec la représentation graphique d'une fonction.

ÉNONCÉ :

On dispose d'un carré de métal de 40 cm de côté. Pour fabriquer une boîte parallélépipédique, on enlève à chaque coin un carré de côté x et on relève les bords par pliage.



1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. On donne $x = 5$ cm. Calculer le volume de la boîte.
3. Calculer le volume $V(x)$ de la boîte en fonction de x .
4. A l'aide de la calculatrice :
 - a) Conjecturer pour quelle valeur de x le volume de la boîte est maximum (on donnera une valeur arrondie au mm).
 - b) Estimer quelles sont les valeurs possibles de x pour que le volume de la boîte soit environ égal à 2000 cm^3 .
5. Effectuer la représentation graphique de la fonction V donnant le volume de la boîte en fonction de la longueur x .
On répondra aux questions suivantes à l'aide du graphique.
 - a) Pour quelle valeur de x , le volume de la boîte est-il maximum ?
 - b) On souhaite que le volume de la boîte soit environ égal à 2000 cm^3 . Quelles sont les valeurs possibles pour x ?

CORRECTION :

1. Pour que la boîte existe, on a : $0 < x < 20$
 x est une valeur strictement positive et inférieure à 20 cm.
2. $x = 5$ cm donc la boîte a une base carrée de côté 30 cm et une hauteur de 5 cm.
 $V = 30 \times 30 \times 5$

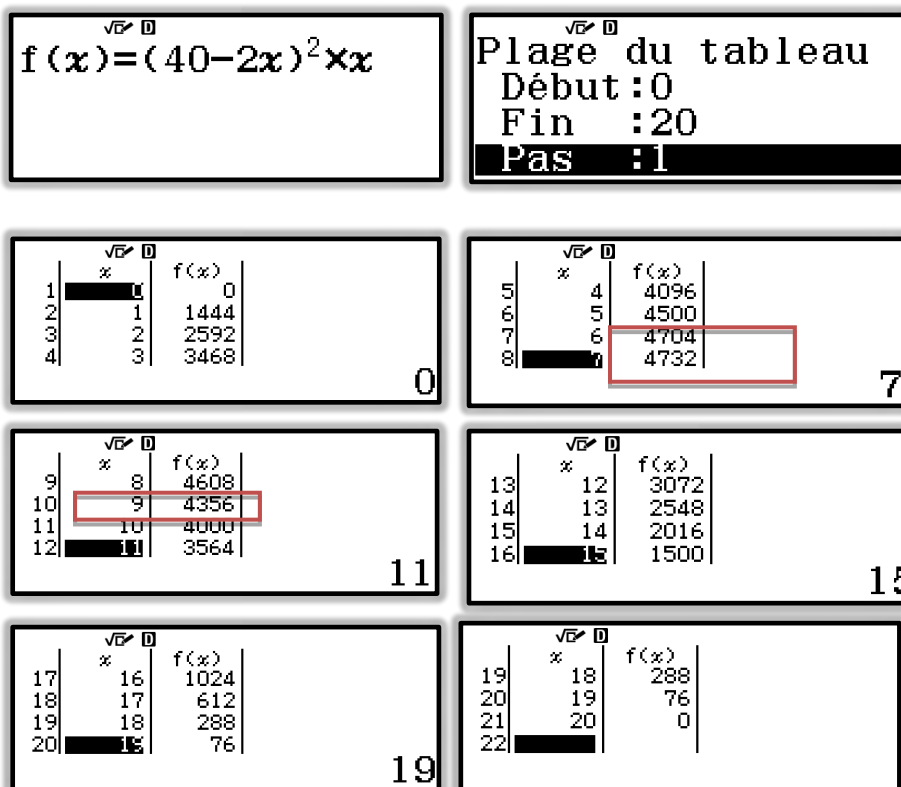


Le volume de la boîte est de 4500 cm^3 .

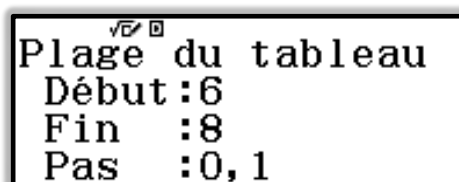
3. La boîte a une base carrée de côté $(40 - 2x)$ cm et une hauteur de x cm.
 $V(x) = (40 - 2x)^2 \times x$
 $V(x) = (1600 - 160x + 4x^2) \times x$
 $V(x) = 4x^3 - 160x^2 + 1600x$

4. La boîte a une base carrée de côté $(40 - 2x)$ cm et une hauteur de x cm.
 $V(x) = (40 - 2x)^2 \times x$

Affichons le tableau de valeurs de la fonction V à l'aide du MENU *Tableau* de la calculatrice :



- a) Il nous faut affiner notre recherche en modifiant le pas ; la valeur recherchée pour x est comprise entre 6 et 8.



	x	$f(x)$
1	6,0	4704
2	6,1	4714,3
3	6,2	4722,9
4	6,3	4729,7

6

	x	$f(x)$
13	7,2	4718,5
14	7,3	4709,6
15	7,4	4699,2
16	7,5	4687,5

7,5

	x	$f(x)$
5	6,4	4734,9
6	6,5	4738,5
7	6,6	4740,3
8	6,7	4740,6

6,7

	x	$f(x)$
17	7,6	4674,3
18	7,7	4659,7
19	7,8	4643,8
20	7,9	4626,5

7,9

	x	$f(x)$
9	6,8	4739,3
10	6,9	4736,4
11	7	4732
12	7,1	4726

7,1

	x	$f(x)$
19	7,8	4643,8
20	7,9	4626,5
21	8	4608
22		

On conjecture que le volume maximum est atteint pour $x = 6,7$ cm au mm près.

- b) Par lecture du tableau de valeurs précédent, on peut supposer que la valeur recherchée pour un volume de la boîte environ égal à 2000 cm^3 se situe entre $x = 1$ et $x = 2$ ou pour $x = 14$.

On peut vérifier à l'aide de l'outil CALC :

Dans le MENU *Calcul*, entrer l'expression $(40 - 2x)^2 \times x$ puis appuyer sur la touche \square . Saisir ensuite la valeur 1,5 puis valider avec B. Recommencer de même avec la valeur 14.

$(40-2x)^2 \times x$
$x = 1,5$

$(40-2x)^2 \times x$
$\frac{4107}{2}$

$(40-2x)^2 \times x$
2053,5

$(40-2x)^2 \times x$
$x = 14$

$(40-2x)^2 \times x$
2016

On conjecture que le volume de la boîte est égal à environ 2000 cm^3 lorsque $x = 1,5$ cm et lorsque $x = 14$ cm.

On peut faire calculer l'image de $x = 1,5$ ou 1,7 en ajoutant une ou plusieurs valeurs de x dans le tableau de valeurs de la fonction.

x	$f(x)$
20	0
21	2053,5
22	2277,2
23	

x	$f(x)$
22	2277,2
23	1995,7
24	2042
25	

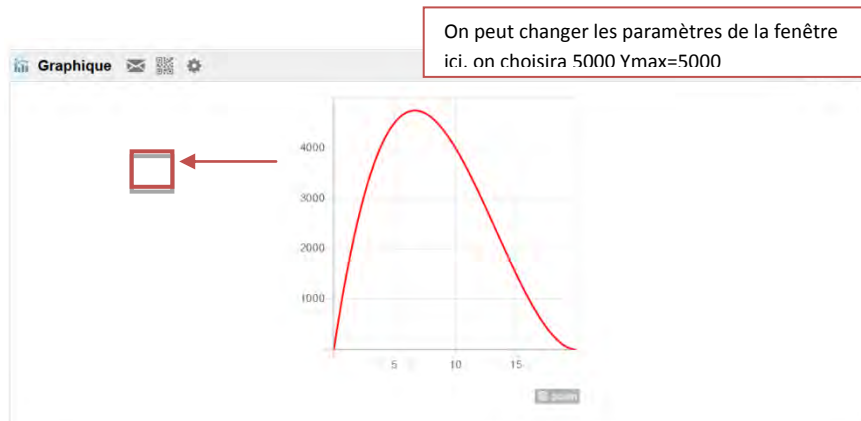
On peut ainsi utiliser et compléter le tableau de valeurs de V dans la limite de 30 valeurs de l'antécédent x de la fonction V .

5. Grâce à la fx-92+ Spéciale Collège, on peut obtenir la représentation graphique de la fonction V d'expression :

$$V(x) = 4x^3 - 160x^2 + 1600x$$

Pour cela on utilise le MENU *Tableau* et l'Outil QR (**SECONDE** **OPTN**) de la calculatrice qui génère un QR-Code.

Il faut ensuite scanner avec son smartphone ou sa tablette ce QR-Code ; on utilisera l'application CASIO Edu+ pour ce scan. On accèdera, via son navigateur web, à la [représentation graphique](#) de la fonction f (qui représente la fonction V étudiée dans notre exercice) :



a) Graphiquement, on conjecture que le volume de la boîte est maximal lorsque $x = 6,7$ cm.

b) On trace la droite d'équation $y = 2000$, elle coupe la représentation graphique en 2 points. On lit l'abscisse de ces 2 points et on obtient :

$$x = 1,5 \text{ cm et } x = 14 \text{ cm.}$$

On conjecture que le volume de la boîte est égal à environ 2000 cm^3 lorsque $x = 1,5 \text{ cm}$ et lorsque $x = 14 \text{ cm}$.

Remarque : $x = 1,5 \text{ cm}$ et $x = 14 \text{ cm}$ sont les **antécédents** de 2000 pour la fonction V .

L'**image** de $x = 1,5$ par la fonction V est proche de 2000 ; de même ; l'**image** de $x = 14$ par la fonction V est proche de 2000.

Retrouvez toutes nos ressources pédagogiques sur www.casio-education.fr