EXERCICE 3, BAC S, METROPOLE, JUIN 2018

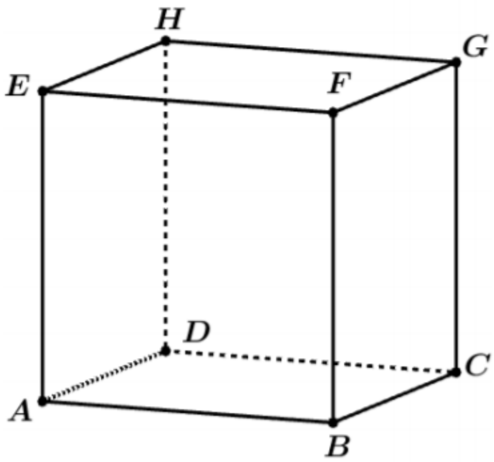
Énoncé :

Le but de cet exercice est d'examiner, dans différents cas, si les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes, c'est-à-dire d'étudier l'existence d'un point d'intersection de ses quatre hauteurs.

On rappelle que dans un tétraèdre $MNPQ$, la hauteur issue de M est la droite passant par M orthogonale au plan (NPQ).

Partie A Étude de cas particuliers

On considère un cube $ABCDEFGH$.



On admet que les droites (AG), (BH), (CE) et (DF), appelées « grandes diagonales » du cube, sont concourantes.

1. On considère le tétraèdre $ABCE$.

a. Préciser la hauteur issue de E et la hauteur issue de C dans ce tétraèdre.

b. Les quatre hauteurs du tétraèdre $ABCE$ sont-elles concourantes ?

2. On considère le tétraèdre $ACHF$ et on travaille dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

a. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ACH) est : $x - y + z = 0$.

b. En déduire que (FD) est la hauteur issue de F du tétraèdre $ACHF$.

c. Par analogie avec le résultat précédent, préciser les hauteurs du tétraèdre $ACHF$ issues respectivement des sommets A, C et H.
Les quatre hauteurs du tétraèdre $ACHF$ sont-elles concourantes ?

PARTIE A

1. a. Dans le cube ABCDEFGH, la droite (AE) est orthogonale aux droites (AB) et (AD) (deux droites sécantes du plan (ABC)). Donc, (AE) est orthogonale au plan (ABC). Par définition, **(AE) est donc la hauteur issue de E dans le tétraèdre ABCE.**

De même, dans le cube ABCDEFGH, la droite (BC) est orthogonale aux droites (BF) et (AB) (deux droites sécantes du plan (ABE)). Ainsi, (BC) est orthogonale au plan (ABE). **(BC) est donc la hauteur issue de C dans le tétraèdre ABCE.**

b. Dans le cube ABCDEFGH, le point C n'appartient pas au plan (ABE). Ainsi, les points A, B, C et E ne sont pas coplanaires. Les droites (AE) et (BC) ne sont pas coplanaires, donc non sécantes. **Les 4 hauteurs du tétraèdre ABCE ne peuvent pas être concourantes.**

2. Dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, on a :

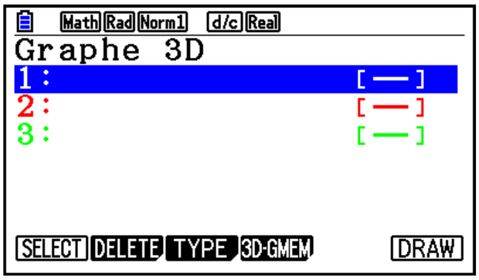
$A(0;0;0)$; $C(1;1;0)$; $H(0;1;1)$; $F(1;0;1)$ et $(0;1;0)$

a. On suppose $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne : $x-y+z=0$

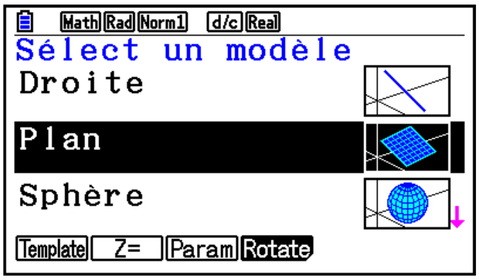
$x_A-y_A+z_A=0-0+0=0$, donc $A\in\mathcal{P}$
$x_C-y_C+z_C=1-1+0=0$, donc $C\in\mathcal{P}$
$x_H-y_H+z_H=0-1+1=0$, donc $H\in\mathcal{P}$

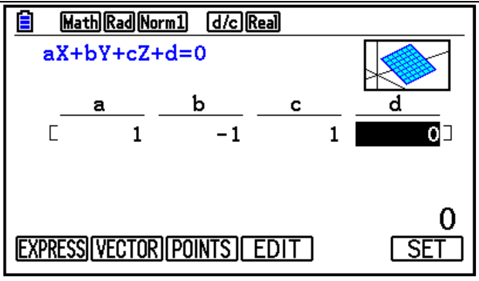
De plus, dans le cube ABCDEFGH, les points A, C et H ne sont pas alignés.
Donc $\mathcal{P}=(ACH)$. $(\boldsymbol{ACH})$ **a ainsi pour équation cartésienne :** $\boldsymbol{x-y+z=0}$**.**

Remarque : on peut vérifier que le plan d'équation cartésienne : $x-y+z=0$ est effectivement le plan (ACH). Pour cela, on va utiliser le menu GRAPHE 3D et taper EXE.

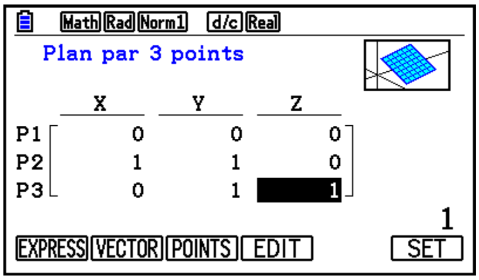


On va d'abord créer, en objet 1, un plan par la donnée de son équation cartésienne en tapant F3 **{TYPE},** choisir un plan et taper EXE et F1 **{EXPRESS}**. Puis, on saisit les valeurs : $a=1$; $b=-1$; $c=1\ et\ d=0$.

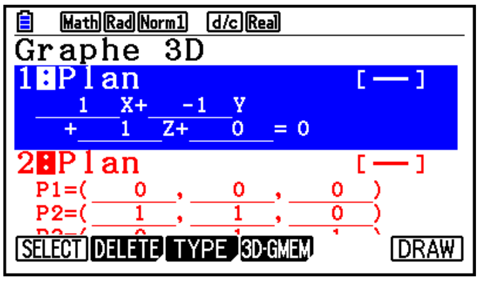




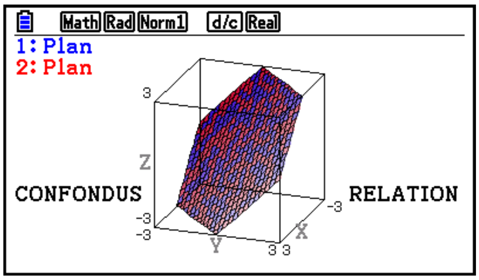
Puis, on va créer, en objet 2, un plan par la donnée de 3 points en appuyant sur F3 **{TYPE},** choisir un plan et taper EXE, F3 **{POINTS}** et enfin en saisissant les coordonnées des points A, C et H.



On peut alors visualiser les 2 plans obtenus en tapant F6 **{DRAW}** et faire tourner la caméra avec les flèches directionnelles ◀ ▶ ▲ ▼.



Les plans semblent confondus. Pour le vérifier, on va taper SHIFT F5 **{G-Solv}** puis F3 **{RELATION}**. Un message indique que les deux plans sont effectivement confondus.



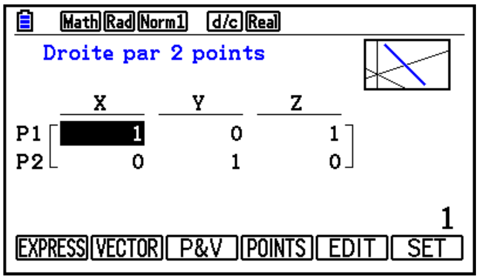
b) (ACH) a pour équation : $x - y + z = 0$. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est donc normal au plan (ACH).

Or $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}x_D - x_F & = 0-1 & = -1\\ y_D - y_F & = 1-0 & = +1\\ z_D - z_F & = 0-1 & = -1\end{pmatrix} = -\vec{u}$.

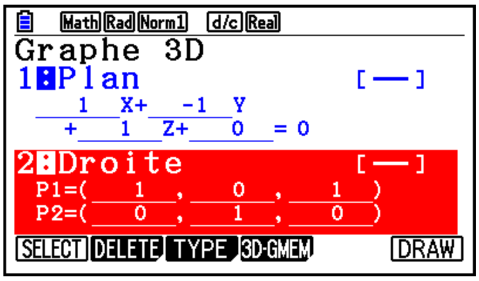
Ainsi $\overrightarrow{FD}$ est normal au plan (ACH). D'où (FD) est orthogonale au plan (ACH). Par définition, **(FD) est donc la hauteur issue de F dans le tétraèdre ACHF.**

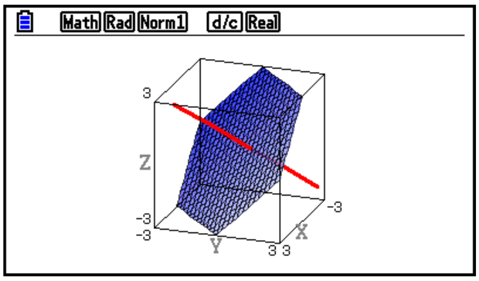
Remarque : on peut vérifier que la droite (FD) est effectivement orthogonale au plan d'équation cartésienne : $x - y + z = 0$. Pour cela, on va utiliser, comme précédemment le menu GRAPHE 3D.
On va garder en objet 1 le plan défini par la donnée de son équation cartésienne.

Puis on va créer, en objet 2, une droite par la donnée de 2 points en tapant [F3] **{TYPE},** puis en choisissant une droite. Saisir ensuite les touches [EXE] et [F4] **{POINTS}**. Définir les coordonnées des points F et D.

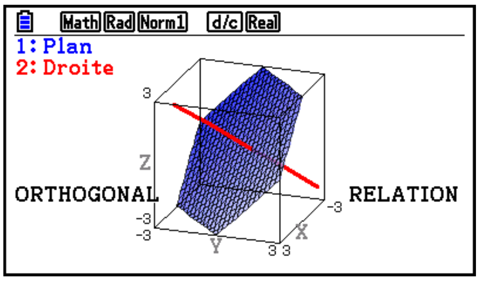


On peut alors visualiser la droite et le plan obtenus en tapant [F6] **{DRAW}** et faire tourner la caméra avec les flèches directionnelles ◀ ▶ ▲ ▼.





Pour vérifier la position relative de la droite et du plan, saisir les touches [SHIFT] [F5] **{G-Solv}** puis [F3] **{RELATION}**. Un message indique que la droite et le plan sont effectivement orthogonaux.



c) Par analogie avec le résultat précédent :
(AG) est la hauteur issue de A
(CE) est la hauteur issue de C
(HB) est la hauteur issue de H

Or, on sait d'après l'énoncé que (AG), (CE), (HB) et (DF) (les "grandes diagonales" du cube), sont concourantes (au point situé au centre du cube). Donc, **les 4 hauteurs du tétraèdre ACHF sont concourantes.**