EXERCICE 2, BAC S, METROPOLE, JUIN 2018

Lycée

Probabilités

Loi binomiale

EXERCICE

Énoncé :

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

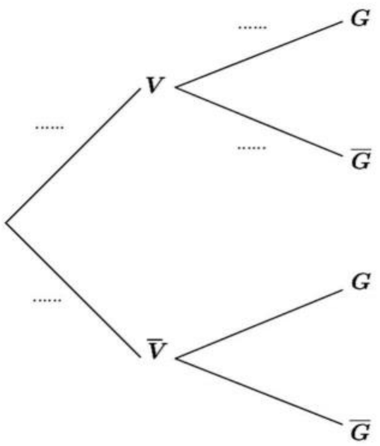
L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40% de la population est vaccinée ;
- 8% des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20% de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les événements :
V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;
G : « la personne a contracté la grippe ».

1. **a.** Donner la probabilité de l'événement G.

b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.

a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.

b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

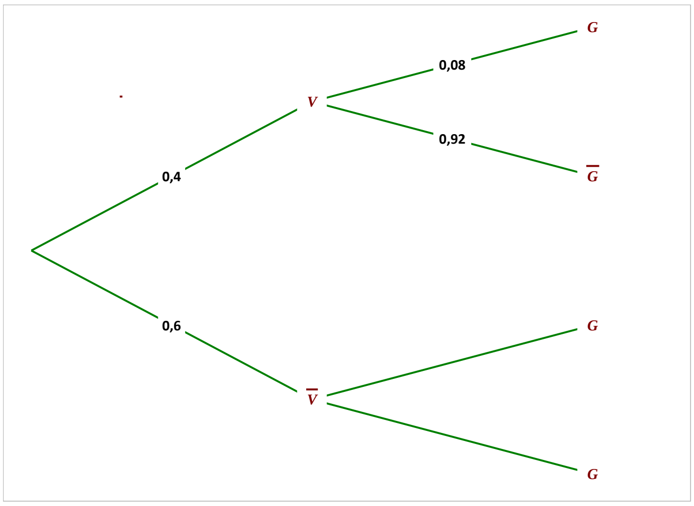
3. On interroge un échantillon de 3750 habitants de la ville, c'est-à-dire que l'on suppose ici que $n = 3750$.
On note Z la variable aléatoire définie par : $Z = \frac{X-1500}{30}$.

On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire Z peut être approchée par la loi normale centrée réduite.

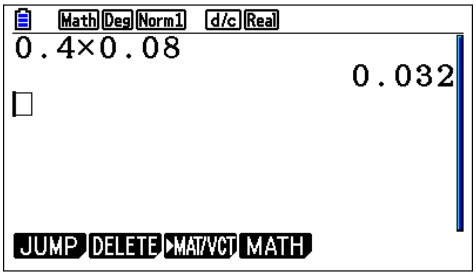
En utilisant cette approximation, déterminer la probabilité qu'il y ait entre 1450 et 1550 individus vaccinés dans l'échantillon interrogé.

PARTIE A

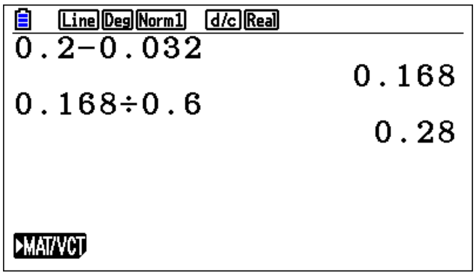
1. a. D'après l'énoncé, 20 % de la population a contracté la grippe donc $P(G) = 0{,}2$.
b. On établit l'arbre pondéré correspondant à la situation :



2. $P(V \cap G) = 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}032$
Donc, la probabilité que la personne choisie ait contractée la grippe ayant été vaccinée est de 0,032.



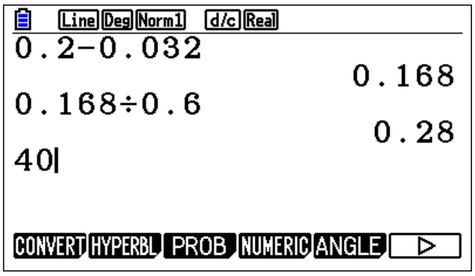
3. $P_{\overline{V}}(G) = \frac{P(\overline{V} \cap G)}{P(\overline{V})} = \frac{P(G) - P(V \cap G)}{P(\overline{V})} = \frac{0{,}168}{0{,}6} = 0{,}28$
Sachant que la personne choisie n'est pas vaccinée, la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale 0,28.



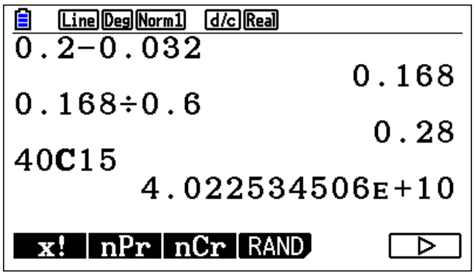
PARTIE B

1. X suit la loi binomiale de paramètres n et 0,4 car on répète n fois de façon indépendante la même épreuve de Bernoulli de probabilité de succès 0,4.

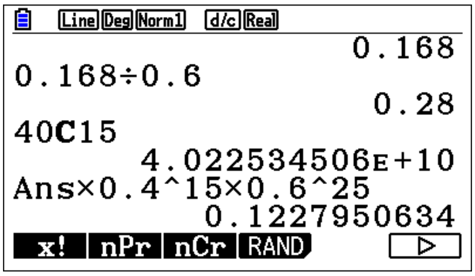
2. a. On veut calculer $P(X = 15) = \binom{40}{15} 0{,}4^{15} 0{,}6^{25}$
Pour déterminer le coefficient binomial, on va écrire "40C15" (pour calculer le nombre de combinaisons de 15 éléments parmi 40), on commence donc par taper 40 puis dans l'onglet **{OPTION}** en appuyant sur la touche éponyme, on fait défiler avec F6 pour sélectionner l'onglet **{PROB}** avec la touche F3.



Ensuite on sélectionne **{nCr}** avec F3 on tape 15 et on valide avec EXE.

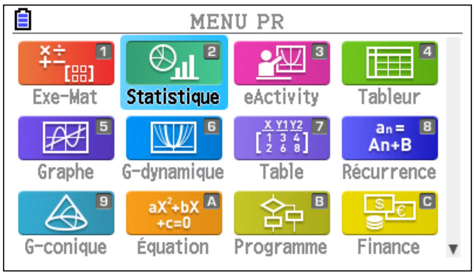


Pour calculer la probabilité voulue il suffit alors de multiplier le résultat par $0{,}4^{15}0{,}6^{25}$.

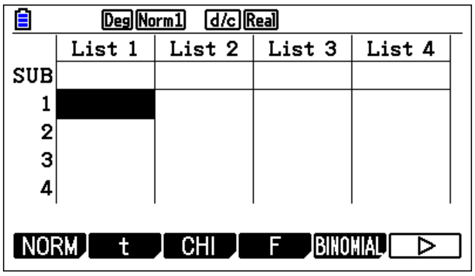


Ainsi la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées est d'environ 0,123.

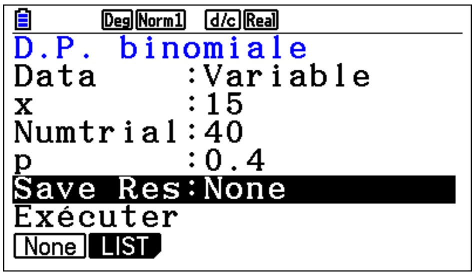
On peut vérifier à l'aide du menu Statistique.



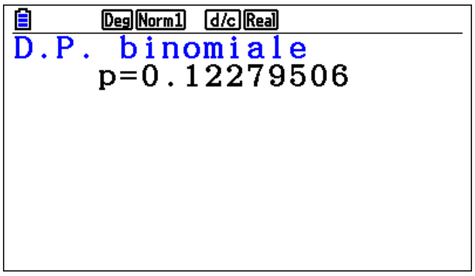
Sélectionner l'onglet **{DIST}** en validant la touche F5. Sélectionner l'onglet **{BINOMIAL}** en validant la touche F5 puis **{BPD}** avec F1.



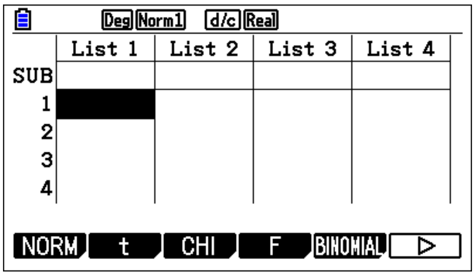
On renseigne les paramètres de la loi et la valeur de x c'est-à-dire 15.



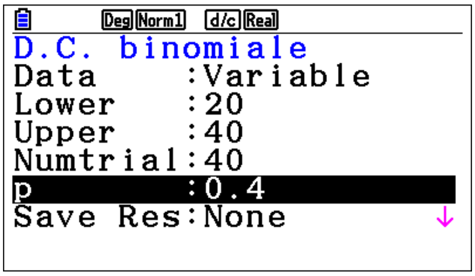
En validant à l'aide de EXE on obtient la probabilité recherchée.



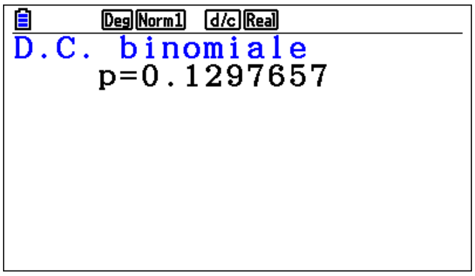
b. On cherche à calculer $P(X \geq 20)$: dans le menu Statistique sélectionner l'onglet **{DIST}** en validant la touche F5.
Sélectionner l'onglet **{BINOMIAL}** en validant la touche F5 puis **{BCD}** avec F2.



On renseigne les paramètres de la loi, la valeur la plus basse (20) et la plus haute (40).



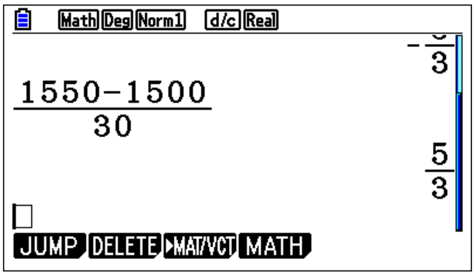
En validant à l'aide de EXE on obtient la probabilité recherchée.
On a donc $P(X \geq 20) \approx 0{,}130$, c'est-à-dire que la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée est d'environ 0,130.



3. $\frac{1450-1500}{30} = -\frac{5}{3}$ et $\frac{1550-1500}{30} = \frac{5}{3}$
Donc $P(1450 \leq X \leq 1550)$

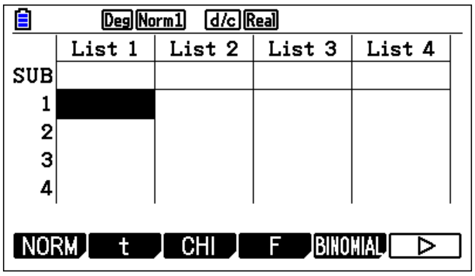
$$= P\left(\frac{1450-1500}{30} \leq \frac{X-1500}{30} \leq \frac{1550-1500}{30}\right)$$

$$= P(-\frac{5}{3} \leq Z \leq \frac{5}{3})$$

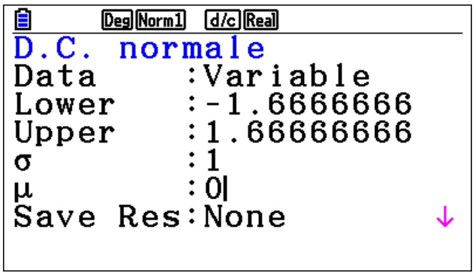


Et comme Z suit la loi normale centrée réduite nous allons calculer cette dernière probabilité.

Dans le menu Statistique sélectionner l'onglet **{DIST}** en validant la touche $\boxed{\text{F5}}$.
Sélectionner l'onglet **{NORM}** en validant la touche $\boxed{\text{F1}}$ puis **{NCD}** avec $\boxed{\text{F2}}$.



On renseigne les paramètres de la loi, la valeur la plus basse ($-\frac{5}{3}$) et la plus haute ($\frac{5}{3}$).



En validant à l'aide de $\boxed{\text{EXE}}$ on obtient la probabilité recherchée.
On a donc $P(1450 \leq X \leq 1550) \approx 0{,}904$, c'est-à-dire que la probabilité qu'il y ait entre 1450 et 1550 individus vaccinés dans l'échantillon interrogé est d'environ 0,904.