EXERCICE 3, BAC S, PONDICHERY, MAI 2018

Énoncé :

Une entreprise conditionne du sucre blanc provenant de deux exploitations U et V en paquets de 1 kg et de différentes qualités.

Le sucre extra fin est conditionné séparément dans des paquets portant le label « extra fin ».

Les parties A, B *et* C *peuvent être traitées de façon indépendante.*

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

Partie A

Pour calibrer le sucre en fonction de la taille de ses cristaux, on le fait passer au travers d'une série de trois tamis positionnés les uns au-dessus des autres et posés sur un récipient à fond étanche.

Les ouvertures des mailles sont les suivantes :

Tamis 1 : 0,8 mm
Tamis 2 : 0,5 mm
Tamis 3 : 0,2 mm
Récipient à fond étanche

Les cristaux de sucre dont la taille est inférieure à 0,2 mm se trouvent dans le récipient à fond étanche à la fin du calibrage. Ils seront conditionnés dans des paquets portant le label « sucre extra fin ».

1. On prélève au hasard un cristal de sucre de l'exploitation U. La taille de ce cristal, exprimée en millimètre, est modélisée par la variable aléatoire X_U qui suit la loi normale de moyenne $\mu_U = 0,58$ mm et d'écart type $\sigma_U = 0,21$ mm.

a. Calculer les probabilités des évènements suivants : $X_U < 0,2$ et $0,5 \leqslant X_U < 0,8$.

b. On fait passer 1 800 grammes de sucre provenant de l'exploitation U au travers de la série de tamis.
Déduire de la question précédente une estimation de la masse de sucre récupérée dans le récipient à fond étanche et une estimation de la masse de sucre récupérée dans le tamis 2.

2. On prélève au hasard un cristal de sucre de l'exploitation V. La taille de ce cristal, exprimée en millimètre, est modélisée par la variable aléatoire X_V qui suit la loi normale de moyenne $\mu_V = 0,65$ mm et d'écart type σ_V à déterminer.

Lors du calibrage d'une grande quantité de cristaux de sucre provenant de l'exploitation V, on constate que 40 % de ces cristaux se retrouvent dans le tamis 2.

Quelle est la valeur de l'écart type σ_V de la variable aléatoire X_V ?

Partie B

Dans cette partie, on admet que 3 % du sucre provenant de l'exploitation U est extra fin et que 5 % du sucre provenant de l'exploitation V est extra fin.

On prélève au hasard un paquet de sucre dans la production de l'entreprise et, dans un souci de traçabilité, on s'intéresse à la provenance de ce paquet.

On considère les évènements suivants :

- U : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation U » ;
- V : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation V » ;
- E : « Le paquet porte le label "extra fin" ».

1. Dans cette question, on admet que l'entreprise fabrique 30 % de ses paquets avec du sucre provenant de l'exploitation U et les autres avec du sucre provenant de l'exploitation V, sans mélanger les sucres des deux exploitations.

a. Quelle est la probabilité que le paquet prélevé porte le label « extra fin » ?

b. Sachant qu'un paquet porte le label « extra fin », quelle est la probabilité que le sucre qu'il contient provienne de l'exploitation U ?

2. L'entreprise souhaite modifier son approvisionnement auprès des deux exploitations afin que parmi les paquets portant le label « extra fin », 30 % d'entre eux contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.
Comment doit-elle s'approvisionner auprès des exploitations U et V ?
Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.

Partie C

1. L'entreprise annonce que 30 % des paquets de sucre portant le label « extra fin » qu'elle conditionne contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.
Avant de valider une commande, un acheteur veut vérifier cette proportion annoncée. Il prélève 150 paquets pris au hasard dans la production de paquets labellisés « extra fin » de l'entreprise. Parmi ces paquets, 30 contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.
A-t-il des raisons de remettre en question l'annonce de l'entreprise ?

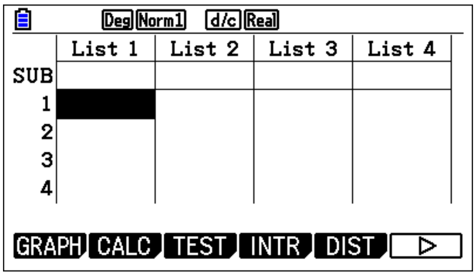
2. L'année suivante, l'entreprise déclare avoir modifié sa production. L'acheteur souhaite estimer la nouvelle proportion de paquets de sucre provenant de l'exploitation U parmi les paquets portant le label « extra fin ». Il prélève 150 paquets pris au hasard dans la production de paquets labellisés « extra fin » de l'entreprise. Parmi ces paquets 42 % contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.
Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, de la nouvelle proportion de paquets labellisés « extra fin » contenant du sucre provenant de l'exploitation U.

PARTIE A

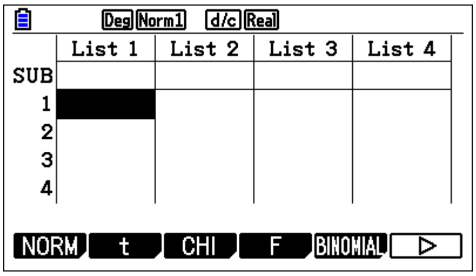
1. a. X_U suit une loi normale de paramètres

$$\mu = 0,58 \ et \ \sigma = 0,21$$

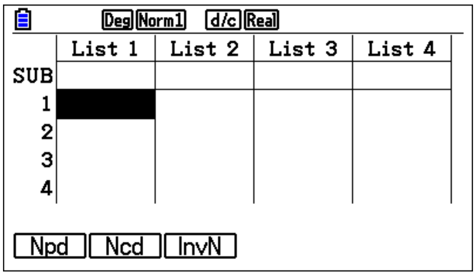
On veut calculer $P(X_U \leq 0{,}2)$:
Sélectionner le menu Statistique puis valider par la touche EXE.



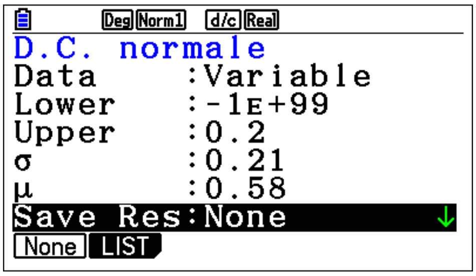
Sélectionner l'onglet **{DIST}** en validant la touche F5.



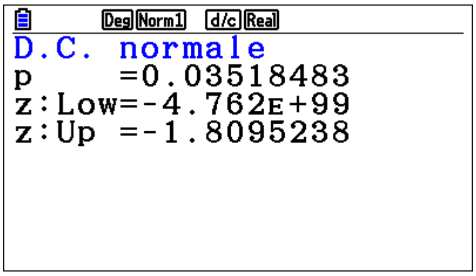
Sélectionner l'onglet **{NORM}** en validant la touche F1.



Sélectionner l'onglet **{Ncd}** en validant la touche F2.

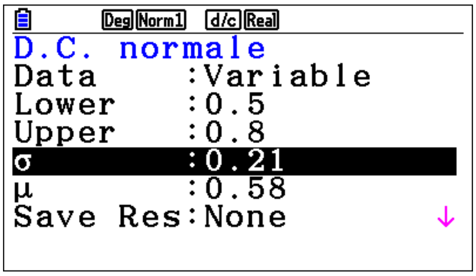


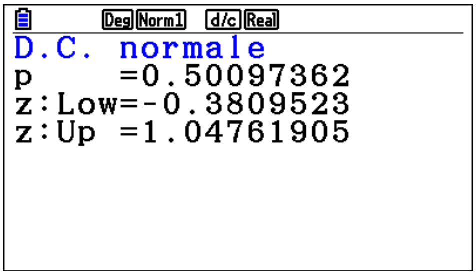
Renseigner l'écran suivant avec les valeurs voulues (ici on va utiliser -10^{99} pour la valeur minimale).
Valider deux fois par la touche EXE.



On a donc $P(X_U \leq 0{,}2) \approx 0{,}035$ arrondi au millième.

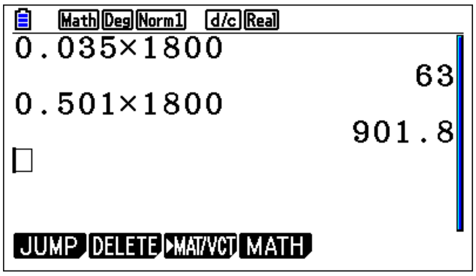
De la même façon on obtient :





Ainsi $P(\,0{,}5 \leq X_U < 0{,}8) \approx 0{,}502$ arrondi au millième

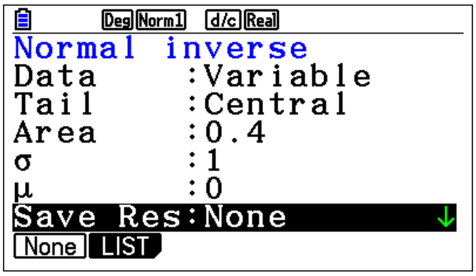
b. Les cristaux récupérés dans le récipient à fond étanche sont ceux de diamètre inférieur à 0,2 mm, on peut donc estimer que la masse de sucre récupérée dans ce récipient est $P(\,X_U \leq 0{,}2) \times 1800 \approx 63\ g$. De même on peut estimer que la masse de sucre récupérée dans le tamis 2 est $P(\,0{,}5 \leq X_U < 0{,}8) \times 1800 \approx 901{,}8\ g$.



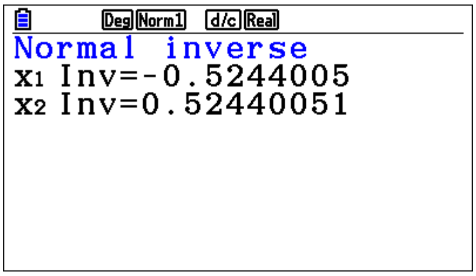
2.

$$0{,}5 < X_V < 0{,}8 \Leftrightarrow -0{,}15 < X_V - 0{,}65 < 0{,}15$$
$$\Leftrightarrow \frac{-0{,}15}{\sigma} < \frac{X_V - 0{,}65}{\sigma} < \frac{0{,}15}{\sigma}$$

Or la variable aléatoire $\frac{X_V - 0{,}65}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite. On peut donc utiliser l'onglet **{InvNorm}** du Menu Statistique (Sélectionner **{central}** dans la deuxième ligne puisqu'on dispose d'un encadrement).

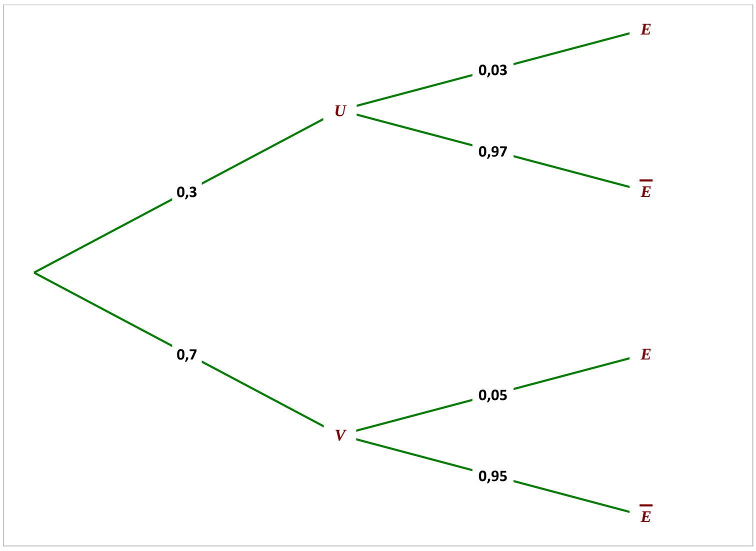


Ainsi $\frac{-0{,}15}{\sigma} \approx -0{,}524 \Leftrightarrow \sigma \approx \frac{0{,}15}{0{,}524} \approx 0{,}286$
L'écart-type de la variable aléatoire X_V est donc de 0,286 arrondie au millième.

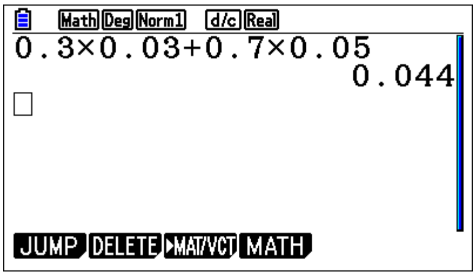


PARTIE B

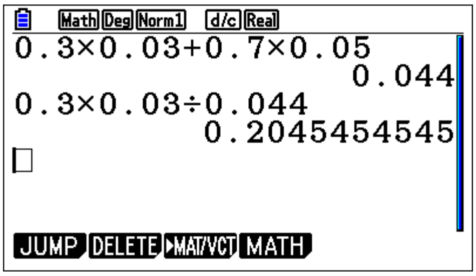
1\. a. On établit l'arbre pondéré correspondant à la situation.



D'après la formule des probabilités totales, on obtient $P(E) = P(U \cap E) + P(V \cap E) = P(U) \times P_U(E) + P(V) \times P_V(E) = 0{,}3 \times 0{,}03 + 0{,}7 \times 0{,}05 = 0{,}044$, ce qui est la probabilité que le paquet prélevé porte le label "extra fin".

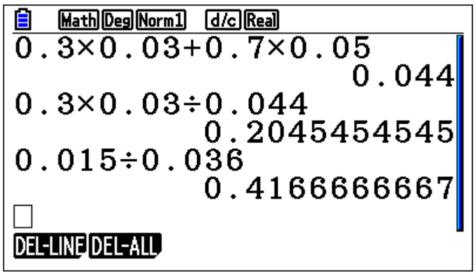


b. $P_E(U) = \frac{P(U \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}3 \times 0{,}03}{0{,}044} \approx 0{,}205$. Sachant qu'un paquet porte le label "extra fin" la probabilité qu'il provienne de l'exploitation U est d'environ 0,205 (arrondie au millième).



2\. On cherche $P(U)$ et $P(V)$ pour que $P_E(U) = 0{,}3$ (les autres valeurs de l'arbre n'étant pas modifiées).
On sait que $P(V) = 1 - P(U)$.

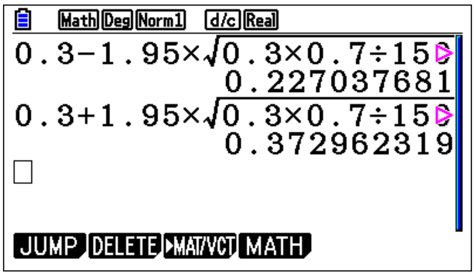
Or $P_E(U) = \frac{P(U \cap E)}{P(E)} \Leftrightarrow P_E(U) \times P(E) = P(U \cap E) \Leftrightarrow 0{,}3 \times \left(P(U) \times P_U(E) + P(V) \times P_V(E)\right) = P(U) \times P_U(E) \Leftrightarrow 0{,}3 \times \left(P(U) \times 0{,}03 + \left(1 - P(U)\right) \times 0{,}05\right) = 0{,}03P(U) \Leftrightarrow 0{,}3\left(0{,}05 - 0{,}02P(U)\right) = 0{,}03P(U) \Leftrightarrow 0{,}015 = 0{,}036P(U) \Leftrightarrow P(U) = \frac{0{,}015}{0{,}036} = \frac{5}{12} \approx 0{,}417$



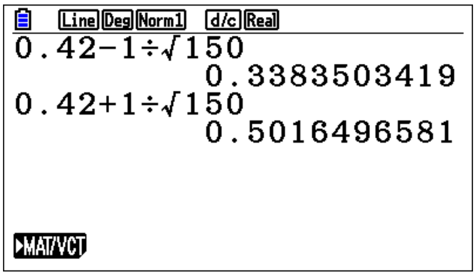
Ainsi il faut que $\frac{5}{12}$ (environ 41,7 %) des paquets proviennent de l'exploitation U et que $\frac{7}{12}$ (environ 58,3 %) proviennent de l'exploitation V.

PARTIE C

1. On utilise un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % : on va regarder si la fréquence de l'échantillon appartient ou non à cet intervalle.
$n = 150 \; et \; p = 0{,}3 \; donc \; n \geq 30, np \geq 5, n(1-p) \geq 5$
Donc les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation sont bien respectées
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est $\boldsymbol{I_n} = [\boldsymbol{p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}; \boldsymbol{p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}]$ où p est la proportion dans la production et n la taille de l'échantillon. Ainsi $I_n \approx [0{,}227;0{,}373]$
La fréquence observée est $f_{obs} = \frac{30}{150} = 0{,}2$ et n'appartient donc pas à l'intervalle, l'échantillon n'est donc pas dans les fluctuations "attendues", l'acheteur a donc raison de remettre en question l'annonce.



2. L'intervalle de confiance au seuil de 95 % est $[\boldsymbol{f_{obs} - \frac{1}{\sqrt{n}}}; \boldsymbol{f_{obs} + \frac{1}{\sqrt{n}}}]$
Comme $n = 150$ et $f_{obs} = 0{,}42$
$n \geq 30, nf_{obs} \geq 5 \; et \; n(1 - f_{obs}) \geq 5$
Donc les conditions d'utilisation de l'intervalle de confiance sont bien respectées.
On peut estimer, au seuil de 95 %, que la proportion de paquets labellisés "extra fin" contenant du sucre provenant de l'exploitation U est contenue dans l'intervalle de confiance $[0{,}338; 0{,}502]$.



Retrouvez toutes nos ressources pédagogiques sur www.casio-education.fr