A L'APPROCHE DE π

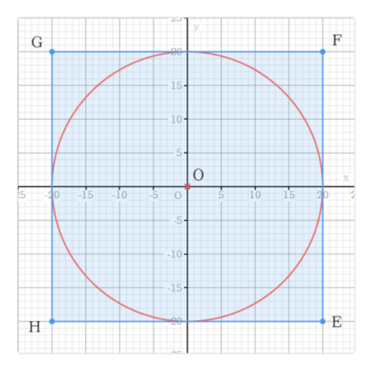
Collège

Algorithmique
Géométrie
Statistiques / Probabilité

CASIO

EXERCICE

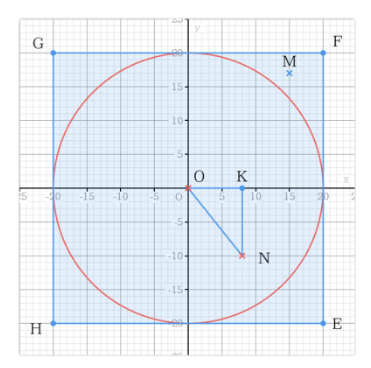
Cette activité relie plusieurs domaines mathématiques tels que la géométrie, les probabilités, l'algorithmique afin d'aboutir à une approximation du nombre π !
Elle est connue sous le nom de "Méthode de Monte Carlo".



Partie A : Calculs d'aires

1. Dans le repère ci-contre, on a tracé un carré et un cercle.
   Quelle est l'aire C de ce carré et l'aire D de ce disque?
2. Calculer le rapport D/C de ces 2 aires.
3. Si on place un point au hasard dans le carré quelle est la probabilité qu'il soit dans le disque?

Partie B : Caractérisation des points dans le carré / dans le disque



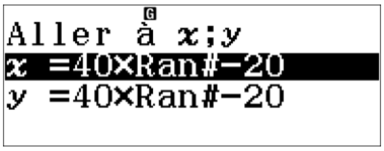
1. Soit $M\,(x_M\,;y_M)$ un point étant à l'intérieur du carré $EFGH$. Quelle condition vérifient x_M et y_M ?
2. Soit $N\,(x_N\,;y_N)$ un point appartenant au disque de centre O et de rayon 20.
   Expliquer pourquoi $x_N^2 + y_N^2 \leq 20^2$.

Aide : Pour que N appartienne au disque, il faut et il suffit que ON soit inférieur à 20.
On peut calculer ON à l'aide du théorème de Pythagore.

Partie C : Un point au hasard

1. La calculatrice *fx-92+ Spéciale Collège* possède la fonctionnalité $Ran\#$ (SECONDE ,) qui renvoie un nombre décimal quelconque compris entre 0 et 1.
   Que va renvoyer la calculatrice en saisissant l'instruction $40 \times Ran\# - 20$?
2. On effectue cette instruction 2 fois de suite, on note
   $x = 40 \times Ran\# - 20$ et $y = 40 \times Ran\# - 20$.
   Que peut-on dire du point $M\,(x\,;\,y)$?
   Comment tester si ce point M appartient au disque de centre O et de rayon 20 ?

Partie D : Approcher le nombre π



1. En utilisant l'instruction ci-contre, créer un algorithme sur la calculatrice qui affiche 1000 points M pris au hasard dans le carré $EFGH$. Pour afficher le point, on se placera sur ses coordonnées et on avancera de 1 pixel

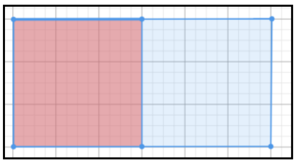
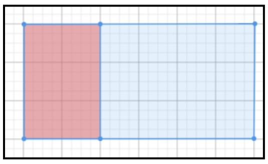
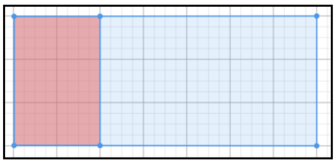
avec le stylo en position d'écriture. Toutes les instructions sont disponibles dans le menu Algorithmique avec la touche OPTN.

2. Ajouter une instruction conditionnelle pour n'afficher que les points qui sont dans le disque de centre O et de rayon 20.
   Aide: Pour insérer une instruction entre deux lignes il suffit de se placer juste en dessous de l'endroit où l'on souhaite l'insérer et d'aller chercher l'instruction souhaitée avec la touche OPTN.
   Dans les instructions conditionnelles la condition est par défaut "A=0". On peut utiliser d'autres variables que A (x, y, B, C, D, E, F, M) avec les touches correspondantes de la calculatrice et on peut sélectionner $<, \leq, >, \geq, = ou \neq$ avec la touche OPTN.
3. Ajouter une variable A initialisée à 0 pour compter le nombre de points appartenant au disque de centre O et de rayon 20. Afficher à la fin de l'algorithme $4 \times A \div 1000$
4. Donner une approximation de π.

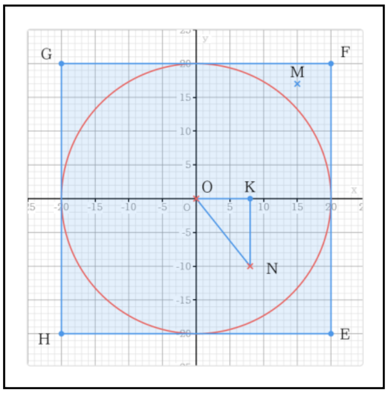
Partie A : calculs d'aires

1. L'aire du carré est : $A = 40^2 = 1600$
   L'aire du disque est égale à $D = \pi \times 20^2 = 400\pi$

2. Le rapport D/C de ces deux aires vaut : $D/C = \frac{400\pi}{1600} = \frac{\pi}{4}$
3. La probabilité qu'il soit dans le cercle est $D/C = \frac{\pi}{4}$. On peut s'en convaincre en regardant d'autres exemples, par exemple la probabilité qu'un point placé aléatoirement dans le rectangle bleu tombe dans la zone rouge:

Partie B : caractérisation des points dans le carré / dans le disque



1. M appartient au carré EFGH, de côté 1 et de centre O.

Donc : $-20 \leq x_M \leq 20$ et $-20 \leq y_M \leq 20$

2. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle ONK, rectangle en K :

$$ON^2 = OK^2 + KN^2$$
$$ON^2 = x_N^2 + y_N^2$$

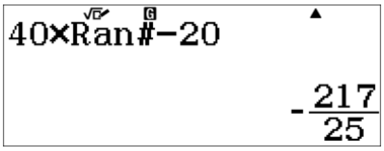
Or pour que N appartienne au disque, il faut et il suffit que $ON \leq 20$, c'est-à-dire que $ON^2 \leq 20^2$.

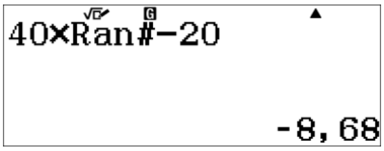
Donc $x_N^2 + y_N^2 \leq 20^2$.

Partie C : un point au hasard

1. L'instruction $Ran\#$ (SECONDE •) renvoie un nombre décimal quelconque compris entre 0 et 1.

Donc, $40 \times Ran\# - 20$ renverra un nombre décimal quelconque entre -20 et 20.





On peut générer plusieurs nombres en appuyant plusieurs fois sur EXE ou sur CALC.
On pourra obtenir la forme décimale en appuyant sur la touche S⇔D.

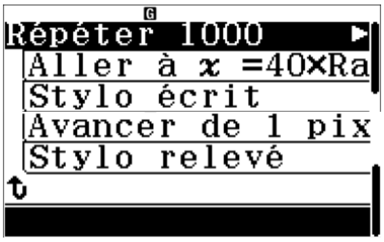
2. L'abscisse et l'ordonnée du point M sont comprises entre -20 et 20.

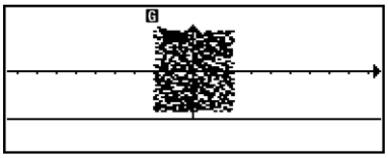
On peut conclure que le point M appartient au carré $EFGH$.
Le point M appartient au disque de centre O et de rayon $0{,}5$ si et seulement si

$x^2 + y^2 \leq 20^2$. Il suffit donc de calculer $x^2 + y^2$ et de tester si cette valeur est inférieure à 20^2.

Partie D : approcher le nombre π

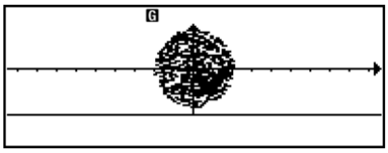
1. On obtient par exemple le dessin ci-dessous (attention cela prend un peu de temps).





2. Il suffit d'ajouter l'instruction "$si\ x^2 + y^2 \leq 20^2$" tout ce qu'il y a après se retrouve dans l'instruction conditionnelle.

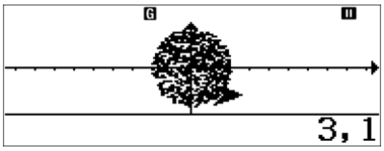
Cela donne quelque chose comme:



3. On ajoute la variable A .

```
0 →A
Répéter 1000
    Aller à x= 40×Ran# - 20 ; y= 40×Ran# - 20
    Si x² + y²≤20² Alors
        A + 1 →A
        Stylo écrit
        Avancer de 1 pixels
        Stylo relevé
    Fin
↻
Afficher résult  4×A÷1000
```

4. En exécutant le programme on obtient par exemple l'affichage ci-dessous (attention la calculatrice attend automatiquement que la touche EXE soit pressée lorsqu'elle affiche un résultat à l'exécution d'un algorithme).



Le nombre de points générés est assez grand (1000). On sait que la probabilité que le point soit dans le disque est $\frac{\pi}{4}$ et donc la fréquence des points générés aléatoirement qui sont dans ce disque (c'est-à-dire $A/1000$) est une approximation de $\frac{\pi}{4}$.
En multipliant ce résultat par 4 on obtient une approximation de π, ici 3,1.