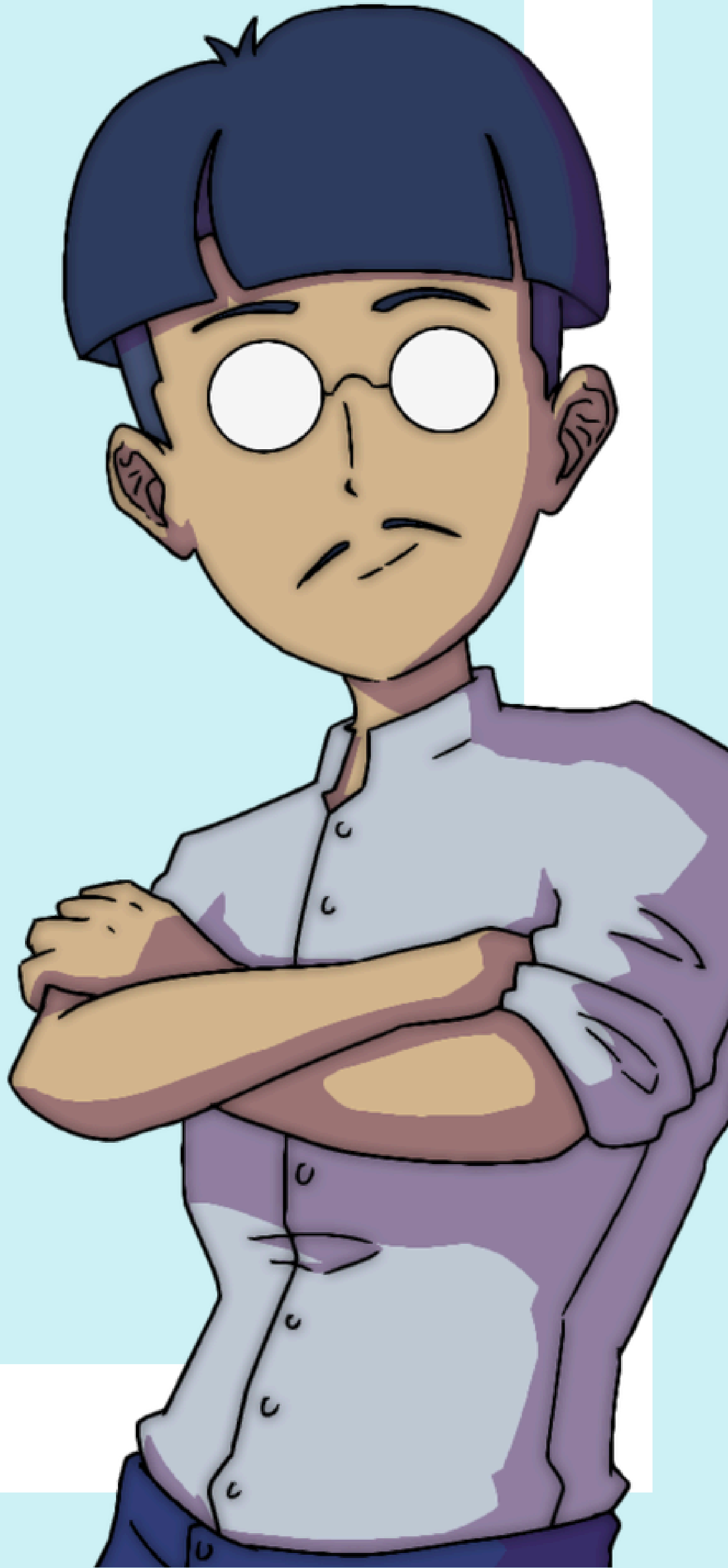
Exercices

BAC 2025

CORRIGÉS

CASIO



SUITES

Extrait de sujet de bac – Asie– 12 juin 2025

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$.
Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.

2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

SUITES

Proposition de rédaction :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$ et $v_n = u_n - 20$ donc $u_n = v_n + 20$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 20$ car $v_n = u_n - 20$

$v_{n+1} = \left(\frac{1}{2}u_n + 10\right) - 20$ car $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 10$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + 20) - 10$ car $u_n = v_n + 20$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \frac{20}{2} - 10$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ donc la suite (v_n) est bien géométrique de raison $\frac{1}{2}$

FONCTIONS

Extrait de sujet de bac – Asie – 12 juin 2025

[...]

On admet que la fonction f est définie pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par

$$f(t) = (60t + 40)\,\mathrm{e}^{-0,5t}$$

1. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0;10]$, on a : $f'(t) = (40 - 30t)\,\mathrm{e}^{-0,5t}$.

2. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$

Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les images des valeurs présentes dans le tableau.

FONCTIONS

Proposition de rédaction :

1. Pour tout $t \in [0;10]$ on a : $\boldsymbol{f(t) = (60t + 40) \times e^{-0,5t}}$ on reconnait $\boldsymbol{u \times v}$ donc :

$$\boldsymbol{f'(t) = (60) \times e^{-0,5t} + (60t + 40) \times e^{-0,5t} \times (-0,5)}$$

$$\boldsymbol{f'(t) = (60)e^{-0,5t} + [60t \times (-0,5) + 40 \times (-0,5)]e^{-0,5t}}$$

$$\boldsymbol{f'(t) = (60)e^{-0,5t} + (-30t - 20)e^{-0,5t}}$$

$$\boldsymbol{f'(t) = (60 - 30t - 20)e^{-0,5t} = (40 - 30t)e^{-0,5t}}$$

FONCTIONS

2. **a.** Pour tout $t \in [0;10]$, $f'(t)$ est du signe de $(40-30t)$ car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

$\boldsymbol{40-30t \geqslant 0 \Leftrightarrow -30t \geqslant -40 \Leftrightarrow t \leqslant \frac{-40}{-30} = \frac{4}{3} \approx 1,3}$ d'où le tableau de variations de f :

y	0		$\frac{4}{3}$		10
Signes de $f'(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	40	$\nearrow$	$120e^{-\frac{2}{3}}$	$\searrow$	$640e^{-5}$

$\boldsymbol{f(0) = (60 \times 0 + 40) \times e^{-0,5\times 0} = 40}$

$\boldsymbol{f(10) = (60 \times 10 + 40) \times e^{-0,5\times 10} = 640e^{-5} \approx 4,3}$

$\boldsymbol{f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(60 \times \frac{4}{3} + 40\right) \times e^{-0,5\times\frac{4}{3}} = 120e^{-\frac{2}{3}} \approx 61,6}$

EQUA DiFF

Extrait de sujet de bac – Amérique du Nord – 21 mai 2025

On considère (E) l'équation différentielle

$$y + y' = (2x + 3)\,\mathrm{e}^{-x},$$

où y est une fonction de la variable réelle x.

1. Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = \left(x^2 + 3x\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y + y' = 0$.
3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

EQUA DIFF

Proposition de rédaction :

1. On veut vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boldsymbol{f_0(x) + f_0'(x) = (2x+3)e^{-x}}$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $\boldsymbol{f_0(x) = (x^2+3x)e^{-x}}$ on reconnait $\boldsymbol{u \times v}$ donc :

$$\boldsymbol{f_0'(x) = (2x+3) \times e^{-x} + (x^2+3x) \times e^{-x} \times (-1)}$$

$$\boldsymbol{f_0'(x) = (2x+3-x^2-3x)e^{-x} = (-x^2-x+3)e^{-x}}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\boldsymbol{f_0(x) + f_0'(x) = (x^2+3x)e^{-x} + (-x^2-x+3)e^{-x}}$$

$$\boldsymbol{f_0(x) + f_0'(x) = (x^2+3x-x^2-x+3)e^{-x}}$$

$$\boldsymbol{f_0(x) + f_0'(x) = (2x+3)e^{-x}}$$

Donc f_0 est bien une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

EQUA DIFF

2. $(E_0) : y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$ on reconnait $y' = ay$ avec $a = -1$ donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = Ce^{-x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

3. $(E) : y' + y = (2x + 3)e^{-x} \Leftrightarrow y' = -y + (2x + 3)e^{-x}$ on reconnait $y' = ay + f$ avec $a = -1$ et d'après **1.**, La fonction f_0 est une solution particulière de (E), donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = Ce^{-x} + f_0(x) = Ce^{-x} + (x^2 + 3x)e^{-x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

INTEGRALES

Extrait de sujet de bac – Métropole – 17 juin 2025

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4}.$$

INTEGRALES

Proposition de rédaction :

<u>Intégration par parties :</u> on pose $\boldsymbol{u'(x) = x}$ et on prend $\boldsymbol{u(x) = \frac{x^2}{2}}$

et on pose $\boldsymbol{v(x) = \ln(x)}$ donc $\boldsymbol{v'(x) = \frac{1}{x}}$

donc

$$\int_1^e x\ln(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\times\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,dx$$

$$\int_1^e x\ln(x)\,dx = \left(\frac{e^2}{2}\ln(e) - \frac{1}{2}\ln(1)\right) - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx$$

$$\int_1^e x\ln(x)\,dx = \left(\frac{e^2}{2}\times 1 - 0\right) - \left[\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}\right]_1^e$$

$$\int_1^e x\ln(x)\,dx = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

PROBAS

Extrait de sujet de bac – Amérique du Nord– 22 mai 2025

[...] On s'intéresse à un échantillon de 20 personnes choisies au hasard dans la population.
La population du pays est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce choix à des tirages successifs avec remise.
On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de personnes contaminées. On rappelle que, pour une personne choisie au hasard, la probabilité d'être contaminée est $p = 0{,}02$.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Justifier et donner ses paramètres.

2. Calculer, en rappelant la formule, la probabilité que 4 personnes exactement soient contaminées dans ce groupe de 20 personnes. Arrondir à 10^{-4} près.

PROBAS

Proposition de rédaction :

1. Chaque tirage d'une personne de l'échantillon constitue une épreuve de Bernoulli avec pour succès : « la personne est contaminée » ($p = 0{,}02$).

On reconnait donc un schéma de Bernoulli avec des épreuves qui sont répétées (20 fois), indépendantes et identiques (car on peut « assimiler ce choix à des tirages successifs avec remise »).

La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc elle suit la **loi binomiale** de paramètres $\boldsymbol{n = 20}$ et $\boldsymbol{p = 0,02}$.

2. On cherche $p(X = 4)$:

On sait que $$p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

Donc $$p(X = 4) = \binom{20}{4} \times 0{,}02^4 \times 0{,}98^{16} \approx 0{,}0006$$

La probabilité que 4 personnes exactement soient contaminées est d'environ $\mathbf{0,0006}$.

COMBINATOIRE

Extrait de sujet de bac – Polynésie – 18 juin 2025

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soient E et F les ensembles $E = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 7\}$ et $F = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 7\ ;\ 8\ ;\ 9\}$.

   Affirmation n° 1 : Il y a davantage de 3-uplets d'éléments distincts de E que de combinaisons à 4 éléments de F.

COMBINATOIRE

Proposition de rédaction :

1. L'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ contient 7 éléments,
donc le nombre de 3-uplets d'éléments de E deux à deux distincts est égal à :

$$7 \times 6 \times 5 = 210$$

L'ensemble $F = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ contient 10 éléments,
donc le nombre de combinaisons à 4 éléments de F est donc égal à :

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

Il y a donc autant de 3-uplets d'éléments de E deux à deux distincts que de combinaisons à 4 éléments de F : **l'affirmation n° 1 est fausse**.

ESPACE

Extrait de sujet de bac – Métropole –18 juin 2025

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$. On considère :

- les points $A(-1\,;\,2\,;\,1)$, $B(1\,;\,-1\,;\,2)$ et $C(1\,;\,1\,;\,1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R};$$

- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \begin{cases} x = s \\ y = \frac{3}{2} + s \\ z = 3 - 2s \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R};$$

1. Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point $S\left(-\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,4\right)$.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

ESPACE

Proposition de rédaction :

1. On cherche l'intersection des droites d et d' en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2t = s \\ y = 2 + t \quad = \frac{3}{2} + s \\ z = 3 - t \quad = 3 - 2s \end{cases}$$

On cherche donc les valeurs de s et t :

$$\begin{cases} \frac{3}{2} + 2t = s \\ 2 + t \quad = \frac{3}{2} + s \\ 3 - t \quad = 3 - 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} + 4s = s \\ 2 + 2s \quad = \frac{3}{2} + s \\ t \quad = 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3s = -\frac{3}{2} \\ s \quad = \frac{3}{2} - 2 \\ t \quad = 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = -\frac{1}{2} \\ s = -\frac{1}{2} \\ t = -1 \end{cases}$$

Donc les solutions sont : $s = -\frac{1}{2}$ et $t = -1$

En utilisant les valeurs : $s = -\frac{1}{2}$ et $t = -1$, on retrouve x, y et z :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2 \times (-1) = -\frac{1}{2} \\ y = 2 + (-1) \quad = 1 \\ z = 3 - (-1) \quad = 4 \end{cases}$$

ESPACE

Il y a un seul point d'intersection : $\boldsymbol{d}$ **et** $\boldsymbol{d'}$ **sont donc sécantes au point** $\boldsymbol{S\left(-\frac{1}{2};1;4\right)}$.

2. **a.** D'après l'énoncé, (ABC) est un plan donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires.

$A(-1;2;1)$ et $B(1;-1;2)$ et $C(1;1;1)$ donc :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = 1-(-1) = 2 \\ y_B - y_A = -1-2 = -3 \\ z_B - z_A = 2-1 = 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A = 1-(-1) = 2 \\ y_C - y_A = 1-2 = -1 \\ z_C - z_A = 1-1 = 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc :}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 1\times 2 + 2\times(-3) + 4\times 1 = 2-6+4 = 0$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 1\times 2 + 2\times(-1) + 4\times 0 = 2-2+0 = 0$$

Donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC)
donc **le vecteur** $\boldsymbol{\vec{n}}$ **est normal au plan** $\boldsymbol{(ABC)}$.

TRIGO

Extrait de sujet de bac – Amérique du Nord – 22 mai 2025

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x}\sin(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

[...] **3.** Justifier que le point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

TRIGO

Proposition de rédaction :

Pour tout $x \in [0;\pi]$: $\quad f(x) = e^x \sin(x)$

On reconnait $u \times v$ donc :
$f'(x) = e^x \times \sin(x) + e^x \times \cos(x)$
$f'(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x))$

On reconnait à nouveau $u \times v$ donc :
$f''(x) = e^x \times (\sin(x) + \cos(x)) + e^x \times (\cos(x) - \sin(x))$
$f''(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x) + \cos(x) - \sin(x))$
$\boldsymbol{f''(x) = 2e^x\cos(x)}$

Pour tout $x \in [0;\pi]$: $\quad f''(x) = 2e^x\cos(x)$
La fonction f'' est du signe de $\cos(x)$ sur l'intervalle $[0;\pi]$
car la fonction *exp* est strictement positive sur $\mathbb{R}$ d'où :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	

La fonction f'' s'annule en changeant de signe en $x = \frac{\pi}{2}$
donc **le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de f est un point d'inflexion**.