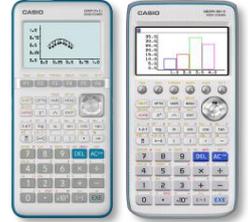


**Baccalauréat - Mars 2023 –  
Métropole, Antilles, Guyane  
Spécialité Mathématiques**

**Collège**

# Fonctions  
# Variations  
# Exp et ln

**CASIO**



ANNALE

**EXERCICE 2**

**5 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$$

où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que  $f$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ , on note  $f'$  sa fonction dérivée.

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .
2. On admet que, pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) = x^2 \left(1 - 8 \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$ .  
En déduire la limite :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
3. Montrer que, pour tout réel  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{2(x^2 - 4)}{x}$ .
4. Étudier les variations de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$  et dresser son tableau de variations complet.  
On précisera la valeur exacte du minimum de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .
5. Démontrer que, sur l'intervalle  $]0 ; 2]$ , l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de  $\alpha$ ).
6. On admet que, sur l'intervalle  $[2 ; +\infty[$ , l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta$  (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de  $\beta$ ).  
En déduire le signe de  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
7. Pour tout nombre réel  $k$ , on considère la fonction  $g_k$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k.$$

En s'aidant du tableau de variations de  $f$ , déterminer la plus petite valeur de  $k$  pour laquelle la fonction  $g_k$  est positive sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .