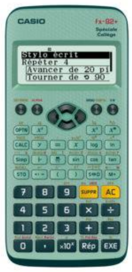


ANNALE

Brevet - Juin 2018 Métropole

Table des matières

1) Exercice 1 (11 points)

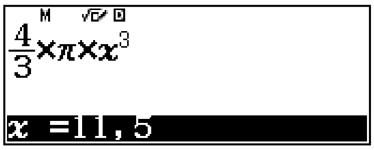
1. La ville de Pyeongchang se trouve à **une latitude d'environ 35° Nord ou +35°** (35° au Nord de l'équateur) et à **une longitude d'environ 127° Est ou +127°** (127° à l'Est du méridien de Greenwich).
Pour la latitude, les graduations sont marquées de 10° en 10°. En ce qui concerne la longitude, on mesure 30° pour deux méridiens, soit 15° entre deux méridiens consécutifs.

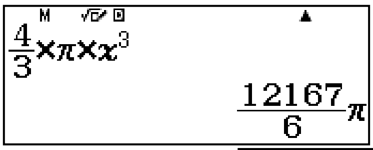
2. Comme rappelé dans l'énoncé, le volume de la boule de cristal est donné par la formule suivante : $V = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$.

Sur le schéma, le diamètre de la boule est indiqué et mesure 23 cm. Soit un rayon R égal à :$R = \frac{23}{2} cm = 11{,}5 cm$. Les touches SECONDE ×10^x permettent d'accéder à π.

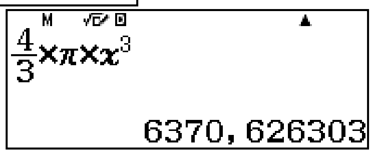
On obtient donc le volume de la boule : $\boldsymbol{V_B = \frac{4}{3} \times \pi \times 11{,}5^3 \approx 6371\ cm^3}$

Astuce : A l'aide de l'outil CALC de la calculatrice, il est possible de substituer la valeur du rayon R dans la formule du volume de la boule (on remplacera R par x dans la formule de la calculatrice). Il suffit d'entrer, tout d'abord, la formule $V = \frac{4}{3} \times \pi \times x^3$ et d'appuyer sur la touche CALC. Enfin, on écrit la valeur du rayon R (= 11,5 cm) et on valide avec la touche EXE.



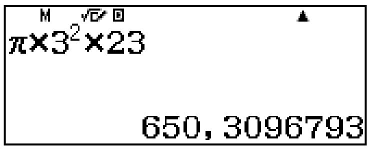


On obtient une approximation décimale du volume de la boule en appuyant sur la touche S⇔D.



On retrouve la valeur exacte et l'arrondi à l'unité près du volume de la boule : $V_B = \frac{12167}{6}\pi \approx 6371\ cm^3$

3. Le volume du trophée est obtenu en additionnant le volume de la boule et le volume du cylindre. Calculons le volume du cylindre.



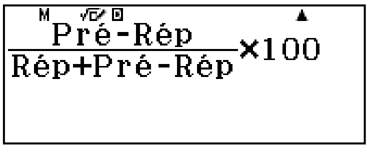
Comme rappelé dans l'énoncé, le volume du cylindre est donné par la formule suivante : $V = \pi \times r^2 \times h$

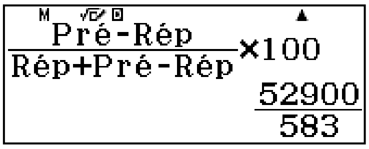
Ici, le diamètre de la base du cylindre est de 6 cm. Son rayon est donc de 3 cm.
Ainsi, le volume du cylindre vaut : $V_C = \pi \times 3^2 \times 23 \approx 650,3\ cm^3$
Calculons le rapport, en pourcentage, du volume de la boule sur le volume du trophée :

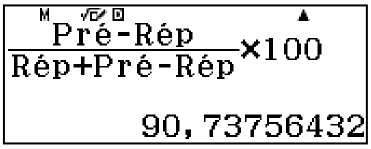
$$V_B / V_{Trophée} \times 100 = \frac{6371}{650,3+6371} \times 100 = 90,7$$

Effectivement, **Marie a raison : le volume de la boule représente environ 90% du volume du trophée !**

Remarque : on utilisera ici les touches Rép et Pré-Rép (ALPHA Rép) qui permettent de rappeler les valeurs exactes obtenues lors des deux derniers calculs effectués. On améliore ainsi l'approximation de la solution.

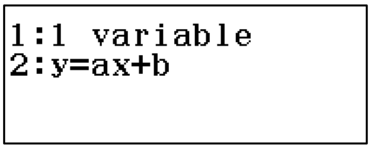




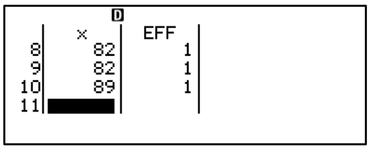


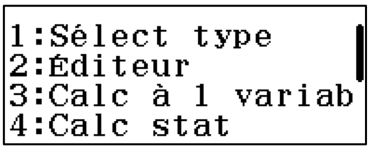
2) Exercice 2 (14 points)

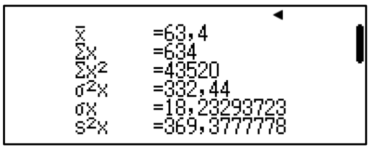
1. 1. A l'aide du menu "Statistiques" de la calculatrice, déterminons la concentration moyenne en PM10 entre le 16 et le 25 janvier dans la ville de Grenoble.
Sur la page d'accueil du menu **STATISTIQUES**, appuyer sur la touche 1 pour sélectionner **"1 : 1 variable".**



Saisir ensuite, une à une, les concentrations en PM10 dans la première colonne, puis, presser les touches OPTN et 3 (**Calc à 1 variab**).

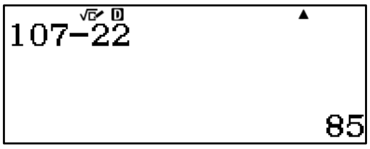




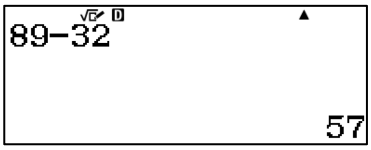


La concentration moyenne en PM10 à **Grenoble** entre le 16 et le 25 janvier est donné par $\bar{x} = \frac{32+39+\cdots+82+89}{10}$ = **63,4 µg/m³**.
A **Lyon**, entre le 16 et le 25 janvier, la concentration moyenne en PM10 est donnée dans l'énoncé. Elle est de **72,5 µg/m³.**
La ville qui a la concentration moyenne en PM10 la plus importante est Lyon.

2. Dans l'énoncé, nous pouvons lire que, pour la ville de Lyon, les concentrations maximale et minimale sont de 107 µg/m³ et de 22 µg/m³. Ainsi, l'**étendue** de la concentration en PM10 à **Lyon** sur la période du 16 au 25 janvier 2017 correspond à la différence des valeurs extrêmes, soit **85 µg/m³**.



Dans le tableau des relevés de la ville de Grenoble, nous y découvrons que la concentration en PM10 la plus importante est de 89 µg/m³, la concentration la plus basse de 32 µg/m³. L'**étendue** de la concentration en PM10 à **Grenoble**, sur la période du 16 au 25 janvier 2017, correspond à la différence des valeurs extrêmes soit 57 µg/m³.



La pollution en PM10 varie avec une plus grande amplitude à Lyon qu'à Grenoble.

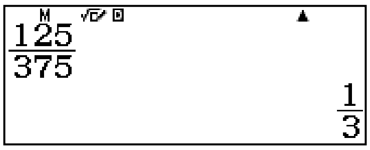
3. Nous pouvons découvrir, dans l'énoncé, que la médiane en PM10, à Lyon, sur les 10 jours, est de 83,5 µg/m³.
Cela signifie qu'au moins la moitié des concentrations journalières en PM10 sont supérieures ou égales à 83,5 µg/m³.

Sur la période du 16 au 25 janvier 2017, il y a 10 jours.
Donc au moins 5 valeurs ont une concentration supérieure ou égale à 83,5 µg/m³.

$$80 \text{ µg/m}^3 < 83{,}5 \text{ µg/m}^3.$$

L'affirmation "du 16 au 25 janvier, le seuil d'alerte de 80 µg/m³ par jour a été dépassé au moins 5 fois à Lyon" est exacte.

3) Exercice 3 (12 points)



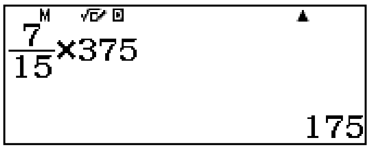
1. Le morceau choisi par le lecteur audio de Théo est sélectionné au hasard parmi tous les morceaux disponibles. Nous sommes donc dans une situation d'équiprobabilité. Nous pouvons ainsi appliquer la formule suivante :

$$P(\text{écouter du rap}) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles} = \frac{\mathbf{125}}{\mathbf{375}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

On en déduit que Théo aura une probabilité de $\frac{1}{3}$ d'écouter du rap sur son lecteur audio en appuyant sur la touche de lecture aléatoire.

2. $\frac{7}{15}$ de 375 morceaux de musique sur son lecteur audio sont des morceaux de rock. Calculons "$\frac{7}{15}$ de 375" :

$$\frac{7}{15} \times 375 = \frac{7 \times 375}{15} = \frac{7 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5}{3 \times 5} = \frac{7 \times 5 \times 5}{1} = 175$$

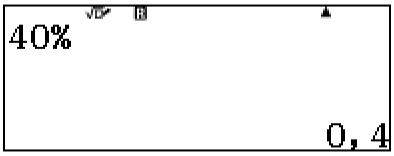


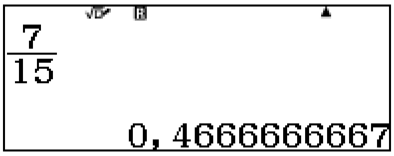
Théo a donc **175 morceaux de rock** sur son lecteur audio.

3. Théo a $\frac{7}{15}$ de morceaux de rock sur son lecteur audio et Alice en a 40%, soit $\frac{40}{100}$.

Il faut donc comparer ces deux nombres pour pouvoir conclure : $\frac{40}{100} = \frac{4\times5\times2}{4\times5\times5} = \frac{2}{5} = \frac{2\times3}{5\times3} = \frac{6}{15}$

Or, $\frac{6}{15} < \frac{7}{15}$ et donc $40\% < \frac{7}{15}$
On peut le vérifier à la calculatrice en observant le format décimal de chaque nombre grâce à la touche [S⇔D] (on utilise [SECONDE] [Rép] pour afficher %).





On peut donc conclure qu'Alice a moins de chance d'écouter un morceau de rock que Théo !

4) Exercice 4 (14 points)

1. BCD est un triangle **rectangle en B** tel que [BC] mesure 7,5 cm et [DC] mesure 8,5 cm.

Nous pouvons appliquer le **théorème de Pythagore** :

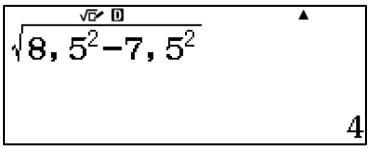
$$CD^2 = CB^2 + BD^2$$

Donc :

$$BD^2 = CD^2 - CB^2 = 8{,}5^2 - 7{,}5^2$$

On utilise [SECONDE] [x^2] pour la racine carrée :

$$BD = \sqrt{8{,}5^2 - 7{,}5^2} = 4\ cm$$

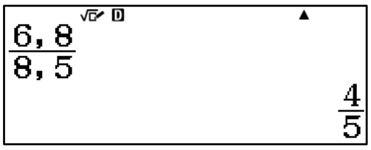


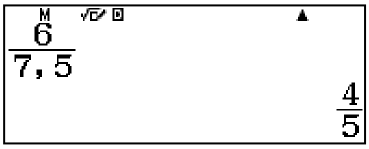
[BD] mesure bien 4 cm.

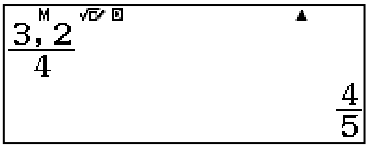
2. Je sais que :
- CBD est un triangle tel que [CB] mesure 7, 5 cm, [BD] mesure 4 cm et [CD] mesure 8,5 cm,
- BFE est un triangle tel que [BE] mesure 6, 8 cm, [BF] mesure 6 cm et [FE] mesure 3,2 cm.

Calculons les rapports des longueurs en les classant par ordre croissant :

$\frac{BE}{CD} = \frac{6,8}{8,5} = \frac{4}{5}$ $\frac{BF}{CB} = \frac{6}{7,5} = \frac{4}{5}$ $\frac{FE}{BD} = \frac{3,2}{4} = \frac{4}{5}$





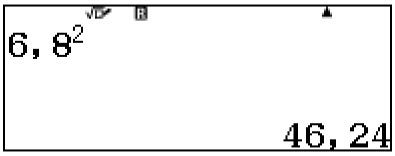


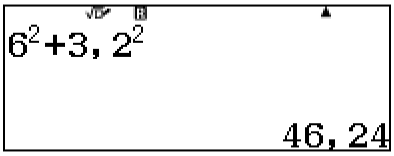
Nous pouvons en conclure que : $\frac{BE}{CD} = \frac{BF}{CB} = \frac{FE}{BD}$

Les 2 triangles ont leurs côtés proportionnels.
Les triangles CBD et BFE sont donc semblables.

3. Il y a deux possibilités pour répondre à cette question :
1ère solution : Je sais que : BFE est un triangle tel que [BE] mesure 6,8 cm, [BF] 6 cm et [FE] 3,2 cm. Le plus grand côté est BE.
Comparons BE^2 et $BF^2 + FE^2$.

$BE^2 = 6,8^2 = 46,24$ $BF^2 + FE^2 = 6^2 + 3,2^2 = 46,24$





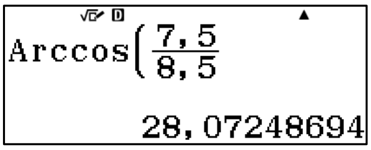
On a donc l'égalité suivante : $BE^2 = BF^2 + FE^2$

D'après la **réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est donc rectangle en F.**

2ème solution : Les triangles **BEF et BCD sont semblables, ils sont de même nature donc rectangle.**
Le plus grand coté du triangle **BFE est le côté [BE]. Il est donc rectangle en F.**

3. 4. CBD est un triangle rectangle en B tel que [CB] mesure 7,5 cm, [BD] mesure 4 cm et [CD] 8,5 cm. On utilise la formule de trigonométrie **CAH** $\cos = \frac{adj}{hypo}$

$\cos \widehat{BCD} = \frac{BC}{CD} = \frac{7,5}{8,5}$ $donc\ \widehat{BCD} = \cos^{-1}(\frac{7,5}{8,5}) = 28,07248694°$



Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{BCD}$ sont des angles adjacents, donc :

$\widehat{ACD} = \widehat{ACB} + \widehat{BCD} = 61 + 28,07248694 = 89,07248694°$

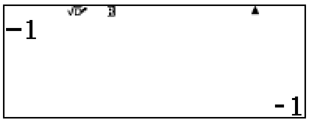
Donc : $\widehat{ACD} \neq 90°$, Max a tort : l'angle $\widehat{ACB}$ n'est pas un angle droit.

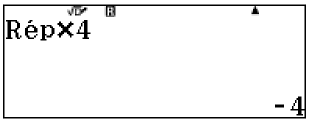
5) Exercice 5 (16 points)

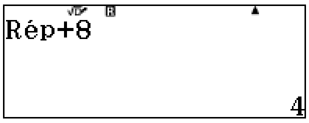
1. On exécute le programme de calcul.
   - On choisit -1
   - On multiplie ce nombre par 4 : $-1 \times 4 = -4$
   - On ajoute 8 : $-4 + 8 = 4$
   - On multiplie le résultat par 2 : $4 \times 2 = 8$

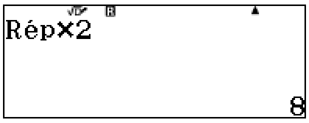
On obtient bien 8 comme résultat final.

On peut le faire à la calculatrice en exécutant chaque étape du programme de calcul. Pas besoin de saisir Rép, la calculatrice le fait automatiquement si un calcul commence par un opérateur (+ $-$ × ÷):



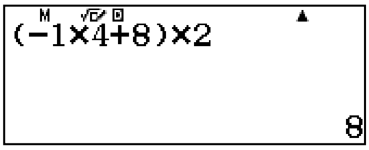






Le résultat du programme peut aussi s'écrire en une seule ligne de calcul :

$$(-1 \times 4 + 8) \times 2 = (-4 + 8) \times 2 = 8$$



2. Essayons de déterminer l'expression qui correspond au programme de calcul en prenant x comme nombre de départ :
   - Choisir un nombre : $\boldsymbol{x}$
   - Multiplier ce nombre par 4 : $4 \times x = \boldsymbol{4x}$
   - Ajouter 8 : $\boldsymbol{4x + 8}$
   - Multiplier le résultat par 2 : $2 \times (4x + 8) = 2 \times 4x + 2 \times\ 8 = \boldsymbol{8x + 16}$

Soit x le nombre de départ tel que le résultat final soit 30.
On a alors :

$$8x + 16 = 30$$
$$8x + 16 - 16 = 30 - 16$$
$$8x = 14$$
$$x = \frac{14}{8} = \frac{7}{4} = \mathbf{1,75}$$

On peut aussi appliquer le programme de calcul “à l'envers” :

$$\left(\frac{30}{2} - 8\right) \div 4 = (15 - 8) \div 4 = 7 \div 4 = \frac{7}{4} = \mathbf{1,75}$$

3. On **développe les expressions A et B** :

$$A = 2 \times (4x + 8) = 2 \times 4x + 2 \times 8 = \boldsymbol{8x + 16}$$
$$B = (4 + x)^2 - x^2 = 4^2 + 2 \times 4 \times x + x^2 - x^2 = \boldsymbol{8x + 16}$$

On en conclut que $A = B$ quelle que soit la valeur de x.

4. **Affirmation 1 :**

On exécute le programme de calcul :
   - On choisit -10
   - On multiplie ce nombre par 4 : $-10 \times 4 = -40$
   - On ajoute 8 : $-40 + 8 = -32$
   - On multiplie le résultat par 2 : $-32 \times 2 = -64$

On obtient -64 comme résultat final.
Donc l'affirmation 1 est fausse, $x = -10$ est un contre-exemple.

Affirmation 2 :

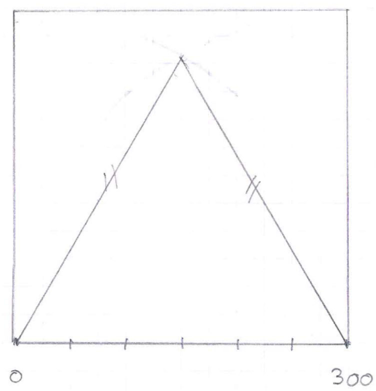
A = $8x + 16$ donne le résultat du programme de calcul.

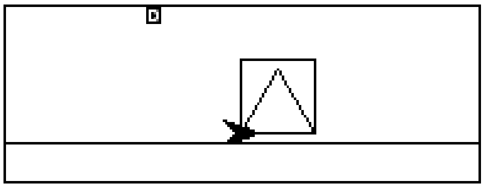
On factorise A :
A = $8 \times x + 8 \times 2 = 8(x + 2)$

Donc si x est un entier, $x + 2$ sera aussi un entier et $8(x + 2)$ sera bien un multiple de 8. L'affirmation 2 est vraie quel que soit l'entier x.

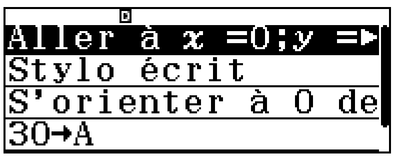
6) Exercice 6 (16 points)

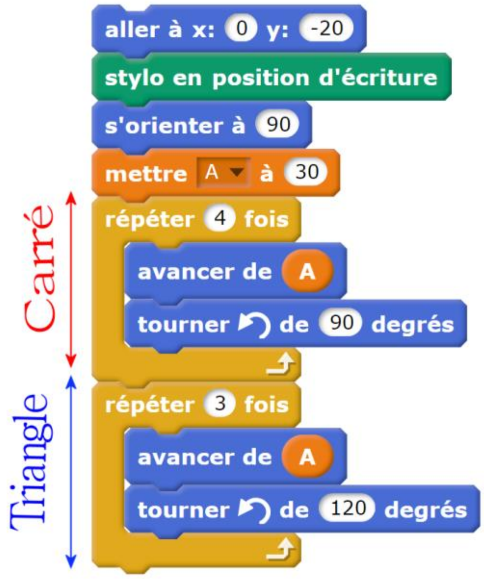
1)
a) Représentons la figure obtenue si le programme est exécuté jusqu'à la ligne 7 comprise.

<table>
<tr><th>Figure représentée
à la main</th><th>Figure obtenue
avec la calculatrice</th></tr>
<tr><td>

Echelle 1 cm pour 50 pixels</td><td>
En modifiant un peu le programme du sujet, on peut le tester sur la calculatrice (voir les détails ci-dessous).</td></tr>
</table>

Préalablement nous allons saisir et exécuter cette partie du programme dans notre calculatrice.

<table>
<tr><th colspan="2">Saisir le programme jusqu'à la ligne 7 incluse</th></tr>
<tr><td>Nous allons légèrement adapter le programme, pour mieux voir le tracé.</td><td>
</td></tr>
</table>



Nous allons :

- nous placer à x= 0 et y = -20 comme position de départ
- nous orienter à 0° *(L'orientation sur notre calculatrice correspond à l'orientation dans un repère mathématique et non à l'orientation choisie par les développeurs de Scratch)*
- renommer la variable longueur en variable A.
- diviser par 10 les distances données dans le programme en pixels (300 pixels dans le programme de l'énoncé correspondent à 30 pixels dans notre programme).

```
Aller à x= 0 ; y= −20
Stylo écrit
S'orienter à  0 degrés
30 →A
Répéter 4
    Avancer de A pixels
    Tourner de ⟲ 90 degrés
↻
Répéter 3
    Avancer de A pixels
    Tourner de ⟲ 120 degrés
↻
```

N'hésitez pas à flasher le QR-Code avec l'application **CASIO EDU+** pour accéder à cette partie du script et à sa "conversion" en Scratch.

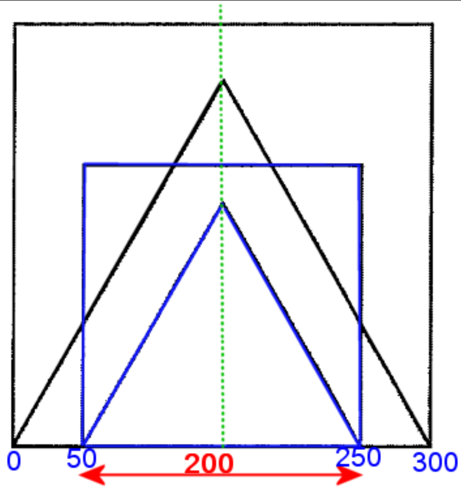
b)

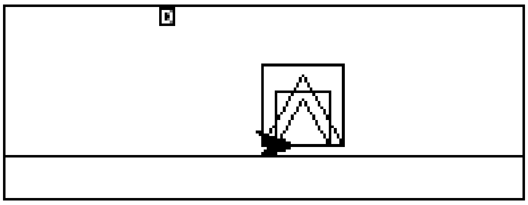
Après l'exécution de la ligne 7	Après l'exécution de la ligne 8
Le stylo se retrouve à sa position initiale en (0 ; 0).	Le stylo avance de **Longueur / 6** soit de 50 pixels vers la droite sa position est donc en (50 ; 0).

2)

Programme à compléter	Figure
Après l'exécution de la ligne 8, le stylo est en (50;0) , 1er sommet du petit carré (bleu) La figure ci-contre possède un axe de symétrie. Le deuxième sommet du carré bleu est donc en (250;0). La longueur du carré bleu est donc de 200. La ligne 9 devient donc	

ou





Aller à x= 0 ; y= − 20
Stylo écrit
S'orienter à 0 degrés
30 →A
Répéter 4
    Avancer de A pixels
    Tourner de ⟲ 90 degrés
⮌
Répéter 3
    Avancer de A pixels
    Tourner de ⟲ 120 degrés
⮌
Avancer de A÷6 pixels
20 →A
Répéter 4
    Avancer de A pixels
    Tourner de ⟲ 90 degrés
⮌
Répéter 3
    Avancer de A pixels
    Tourner de ⟲ 120 degrés
⮌

	N'hésitez pas à flasher le QR-Code avec l'application CASIO EDU+ pour accéder au script et à sa "conversion" en Scratch.

3) a) La transformation géométrique qui permet d'obtenir le petit carré à partir du grand carré est une homothétie. Déterminons son rapport de réduction k :

$$k = \frac{\text{Longueur côté petit carré}}{\text{Longueur côté grand carré}}$$

$$k = \frac{200}{300}$$

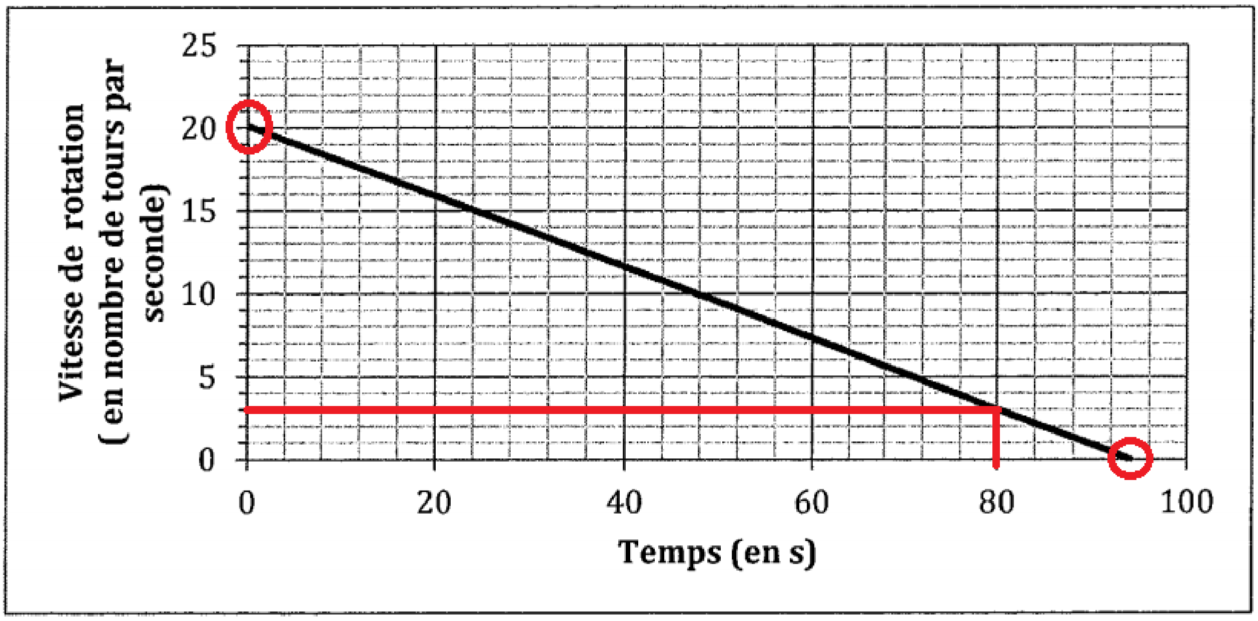
$$k = \frac{2}{3}$$

b) Je sais que le rapport de réduction est de $\frac{2}{3}$. Or si les longueurs d'une figure sont multipliées par un nombre k (positif),alors l'aire est multipliée par k². Donc le rapport des aires entre les 2 carrés est de $(\frac{2}{3})^2$ soit $\frac{4}{9}$**.**

7) Exercice 7 (17 points)

1. Lorsque deux grandeurs sont proportionnelles, la représentation graphique de l'une en fonction de l'autre est une droite qui passe par l'origine du repère.
Ce n'est pas le cas ici ; la représentation graphique de la vitesse de rotation en fonction du temps est une droite passant par le point de coordonnées $(0\,;20)$.
On peut donc conclure que le temps et la vitesse de rotation du hand-spinner **ne sont pas proportionnels.**

2. Les réponses à cette question se font uniquement par lecture graphique.



Inspiré de : https://www.sciencesetavenir.fr/fondamental/combien-de-temps-peut-tourner-votre-hand-spinner_112808

a. La vitesse de rotation initiale du hand-spinner correspond à sa vitesse au bout de 0 seconde, on lit l'ordonnée à l'origine : V = 20 tours/seconde.
La vitesse de rotation initiale du hand-spinner est donc de **20 tours/seconde**.

b. Il faut d'abord convertir 1min 20s en secondes :
1min 20s = 60s + 20s = 80s
Lorsque le temps est égal à 80s, on a : V = 3 tours/s.
Donc après 1min 20s, le hand-spinner a encore une vitesse de **3 tours/s.**

c. Le hand-spinner va s'arrêter lorsque sa vitesse sera nulle, c'est-à-dire lorsque le temps sera égal à 94s.
94s = 1min 34s
Au bout d'une minute et 34 secondes, le hand-spinner aura une vitesse nulle**, il s'arrêtera**.

Remarque sur la lecture graphique :
Sur l'axe des abscisses, 20s correspondent à 5 graduations. Donc une graduation correspond à 4s et une demi-graduation correspond à 2s.

3. $V(t) = -0{,}214 \times t + V_{initiale}$

a. $V_{initiale} = 20$ tours/s
On calcule sa vitesse au bout de 30s :

$$V(30) = -0{,}214 \times 30 + 20 = 13{,}58$$

Au bout de 30s et avec une vitesse initiale de 20 tours/s, la vitesse de rotation du hand-spinner sera de **13,58 tours/s**.

b. Le hand-spinner s'arrêtera lorsque sa vitesse sera nulle, c'est-à-dire lorsque $V(t) = 0$ avec $V(t) = -0{,}214 \times t + V_{initiale}$

Il faut donc résoudre l'équation :
$V(t) = 0$ pour trouver $t_{arrêt}$ avec $t_{arrêt}$ le temps nécessaire au hand-spinner pour qu'il s'arrête de tourner.
$-0{,}214 \times t_{arrêt} + V_{initiale} = 0$
$-0{,}214 \times t_{arrêt} = -V_{initiale}$
$t_{arrêt} = \frac{-V_{initiale}}{-0{,}214}$
$t_{arrêt} = \frac{V_{initiale}}{0{,}214} = \frac{1}{0{,}214} \times V_{initiale}$

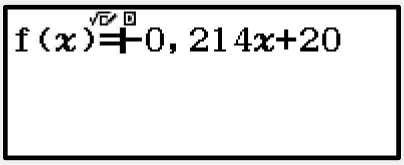
Avec $V_{initiale} = 20\ tours/s$, on obtient : $t_{arrêt} \approx 94s$.

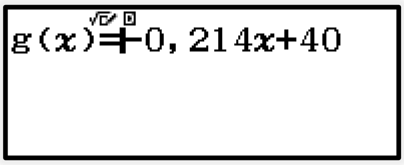
Le hand-spinner, avec une vitesse initiale de 20 tours/s, s'arrêtera après **1min 34s.** On retrouve par le calcul le résultat obtenu par la lecture graphique.

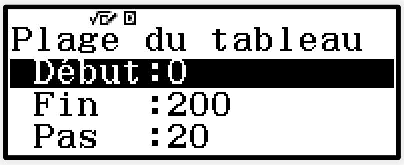
c. $t_{arrêt} = \frac{V_{initiale}}{0{,}214} = \frac{1}{0{,}214} \times V_{initiale}$
Il s'agit là d'une **fonction linéaire** $t_{arrêt}$ en fonction de $V_{initiale}$, de coefficient $\frac{1}{0{,}214}$. On est donc dans une **situation de proportionnalité**, le temps d'arrêt est proportionnel à la vitesse initiale du hand-spinner. Par conséquent, si l'on double sa vitesse initiale, on doublera son temps d'arrêt ! Autrement dit, si l'on lance le hand-spinner avec une vitesse deux fois supérieure, il faudra attendra deux fois plus longtemps pour qu'il s'arrête !

Autre raisonnement possible (graphiquement) : lorsque l'on double la vitesse initiale $V_{initiale}$ dans l'expression $V(t) = -0{,}214 \times t + V_{initiale}$, on double l'ordonnée à l'origine de la droite, représentation graphique de cette fonction ; on obtient une représentation graphique qui est une droite parallèle à la droite de la représentation graphique de la fonction $V(t) = -0{,}214 \times t + 20$ puisqu'elles ont le même coefficient directeur et par conséquent la même pente !

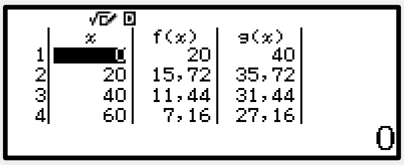
Visualisons les représentations graphiques des deux fonctions ; la première avec une vitesse initiale égale à 20 tours par seconde et la seconde égale à 40 tours par seconde.
Dans le menu **Tableau** (MENU 4) de la calculatrice on entre l'expression des deux fonctions puis on paramètre le tableau de valeurs:

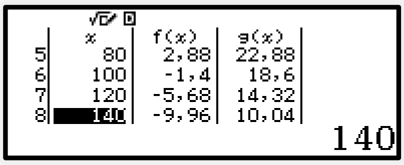


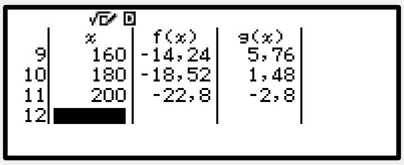




On obtient le tableau de valeurs des deux fonctions :

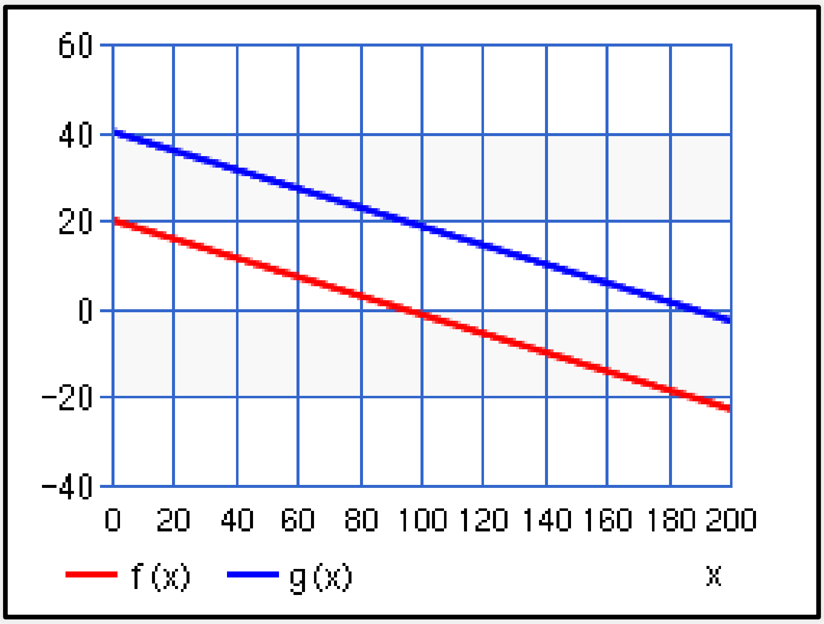






Ceci ne nous permet pas de conclure ; il nous faut générer le QR-Code lié à ce tableau de valeurs (SECONDE OPTN) pour obtenir la représentation graphique de ces deux fonctions :

On observe ainsi ce que nous avions prédit, les représentations graphiques de ces deux fonctions sont deux droites parallèles d'ordonnées à l'origine respectivement 20 et 40 tours par seconde.



Schématisons la situation ; on place les points O, A, B, D et E pour les besoins de la démonstration.

On a donc ici : $OB = 2 \times OA$ puisque l'on double la vitesse initiale du hand-spinner. A est donc le milieu du segment [OB].
Or, les droites vertes et rouges sont parallèles.
Donc d'après le théorème des milieux, D est le milieu du segment [OE]. Et par conséquent $OE = 2 \times OD$; le temps a doublé !